This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UC-NRLF
B 4 501 661

EINFÜHRUNG

IN DAS

STEREOMETRISCHE ZEICHNEN.

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER

KRYSTALLOGRAPHIE UND KARTOGRAPHIE.

VON

Dr. GUSTAV HOLZMÜLLER,
DIREKTOR DER GEWERBESCHULE ZU HAGEN,
MITGLIED DER KAISERL. LEOP. CAROL. AKADEMIE DER NATURFORSCHER.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.

YD 05058

Digitized by Google

Mathematics

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Received Dec. , 1889

Accessions No. 39687 Shelf No.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

EINFÜHRUNG

IN DAS

STEREOMETRISCHE ZEICHNEN.

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER

KRYSTALLOGRAPHIE UND KARTOGRAPHIE.

VON

Dr. GUSTAV HOLZMÜLLER,
DIREKTOR DER GEWERBESCHULE ZU HAGEN,
MITGLIED DER KAISERL. LEOP. CAROL. AKADEMIE DER NATURFORSCHER.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.

Digitized by Google

QA501
H6

39687

Digitized by Google

Vorwort.

Während der didaktische Wert geometrischer Konstruktionsaufgaben überall unbedingte Anerkennung findet, ist dies bezüglich der entsprechenden stereometrischen Übungen nicht allgemein der Fall. Auf zahlreichen Schulen wird nur das beweisende und berechnende, jedoch nicht das konstruktive Element der Stereometrie berücksichtigt. Dafs damit ein Hauptzweck dieses Unterrichts, die Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens, gröfstenteils verloren geht, ergiebt sich schon daraus, dafs auf den Direktoren-Versammlungen und Lehrerkonferenzen häufig darüber geklagt wird, es scheiterten sehr viele Schüler an der Stereometrie. Die Lösung des Rätsels liegt in der Vernachlässigung des Zeichnens. Ganz falsch aber ist es, anzunehmen, zur Stereometrie wären besondere Anlagen, d. h. andere, als zur Geometrie, erforderlich.

Verfasser hat sowohl auf dem Gymnasium, als auch auf der Gewerbeschule beim Betreiben der Stereometrie stets die erste Hälfte der Zeit auf Konstruktionsübungen, die zweite auf die theoretische Behandlung und das Berechnen verwandt. Er begann mit Aufgaben, wie sie der Anfang dieses Buches bietet. Ging er nach hinreichender Ausbildung der räumlichen Anschauung an den zweiten Teil der Arbeit, also an die gebräuchliche Behandlung des Lehrstoffs, so geschah es, wie versichert werden kann, in einer für Lehrer und Schüler gleich anregenden und fruchtbringenden Weise und schnell genug, um den ursprünglichen Zeitverlust, wenn von einem solchen überhaupt die Rede sein darf, auszugleichen.

Ein systematisches Betreiben der darstellenden Geometrie ist dabei durchaus nicht nötig. Dasselbe würde schon wegen der dazu erforderlichen Zeit auf unseren höheren Schulen — von den Ge-

Digitized by Google

werbeschulen und Ober-Realschulen abgesehen — unmöglich sein. Es handelt sich also nur um eine methodische Auswahl fruchtbarer Übungsaufgaben, die sich auch ohne die breiteren Grundlagen der darstellenden Geometrie bewältigen lassen, Aufgaben, durch die man unvermerkt in diese Disziplin eingeführt wird.

Auf der 21ten Direktoren-Versammlung der Provinz Westfalen kam dieser Gegenstand zur Sprache. Auf Seite 129 jener Verhandlungen sind die Ansichten des Verfassers kurz skizziert. Seine These: „In der Stereometrie dürfen Konstruktionsaufgaben nicht vernachlässigt werden", fand allgemeine Zustimmung. (These 14.)

Für das Realgymnasium wurden in These 4 die Elemente der beschreibenden Geometrie als notwendig erklärt, dagegen die von dem Herrn Referenten mit gewünschte Schattenkonstruktion mit Recht ausgeschieden. Jedoch auch für die Oberklassen des Realgymnasiums würde sich eine methodische Behandlung, wie sie unser Buch vorschlägt, in höherem Grade eignen, als die systematische Bearbeitung der Projektion von Punkten, Geraden, Kurven, Flächen, Körpern u. s. w., wobei zu befürchten steht, dafs man aus Zeitmangel nicht einmal bis zu den verwertbaren Dingen vordringt.

Noch ein Bestreben suchte der Verfasser zur Geltung zu bringen, bei den einzelnen Aufgaben nur die unbedingt notwendigen Elemente durch Projektion zu bestimmen, den Rest der Lösung aber der Mathematik zu überlassen. Daraus ergab sich manche bedeutende Abkürzung. Auch wird das Ineinandergreifen von Mathematik und Zeichnen in höherem Grade anregend auf den Schüler einwirken, als das einseitige Verweilen bei den Anfangsgründen der darstellenden Geometrie, wie es an manchen Schulen geschehen mag, wo der Unterricht in der Hand eines mathematisch nicht hinreichend geschulten Zeichenlehrers liegt. Dies soll durchaus kein Tadel für die geschätzten Kollegen sein, daher sei bemerkt, dafs auch der umgekehrte Fall, wo der Lehrer der Mathematik nicht hinreichend im räumlichen Zeichnen geübt ist, zu Bedenken Anlafs geben kann.

Manche unserer Konstruktionen gehen infolge des angedeuteten Strebens ganz aus der gebräuchlichen Schablone heraus. So werden z. B. die parallelperspektivische Darstellung der Kugel in Figur 110 und die zentralperspektivische in Figur 148, wo sich die Endpunkte der verkürzt erscheinenden Axe als Brennpunkte der zu zeichnenden Ellipse herausstellen (woraus sich sofort eine leichte Bestimmung ihrer Hauptaxe ergiebt), manchem Mathematiker und Zeichenlehrer noch nicht bekannt gewesen sein.

Digitized by Google

Die Krystallographie und einige Hauptaufgaben der Kartographie, in letzterer Beziehung besonders die Konstruktion der sogenannten Ptolemäischen Halbkugelkarten und der Mercatorkarte, sind aus leicht erklärlichen Gründen mit berücksichtigt worden. Dieselben aufzunehmen trug der Verfasser um so weniger Bedenken, weil der kürzlich verstorbene Geograph Professor Zöppritz ihm mitgeteilt hatte, für eine zweite Auflage seiner Kartographie würde er bezüglich der Mercatorkarte die elementare Methode der Quadratteilung benutzen, wie Verfasser sie im 14ten Jahrgang der Zeitschrift für mathemat. Unterricht gegeben hätte. — Auch wurden vielfach Andeutungen über die Verwendbarkeit der Resultate für die Mechanik und Technik eingestreut (z. B. die graphische Darstellung gewisser Trägheitsmomente durch Körper). Ihre Absicht war, das Interesse des Schülers für den fraglichen Unterrichtszweig zu erwecken und ihm einen Einblick in den geistigen Zusammenhang desselben mit zahlreichen wissenschaftlichen Dingen zu eröffnen, so dafs es sich für ihn nicht lediglich um ein dürres, unfruchtbares und durch seine Einseitigkeit abstofsendes Gebiet handelt.

Was nun die didaktische Verwendung des gegebenen Stoffes anbetrifft, so ist es durchaus nicht nötig, alle Aufgaben bearbeiten zu lassen. Einige weitergehende sind durch Klammern kenntlich gemacht und können überschlagen werden. Aufgenommen wurden sie teils um Abrundung des Stoffes zu gewinnen, teils um begabteren Schülern Perspektiven in weitere mathematische Gebiete zu eröffnen. Jedoch ist keine Aufgabe dabei, die sich z. B. auf dem Realgymnasium und der Ober-Realschule nicht bewältigen liefse. Durch jenes Weitergehen dürfte das Büchlein auch manchem Studierenden der Mathematik zur Anregung dienen, denn leider ist die darstellende Geometrie auf den Universitäten noch nicht als obligatorischer Unterrichtsgegenstand anerkannt, und bei der rein analytischen Behandlung der Raumgeometrie gelangt mancher Zuhörer nicht zur räumlichen Vorstellung dessen, was die gewonnenen Formeln bedeuten sollen. Hier erfährt er wenigstens, wie ein Teil der wichtigsten Flächen und Raumkurven exakt konstruiert werden kann, und das Bedürfnis zum Studium der darstellenden Geometrie als Wissenschaft wird sich bald von selbst einstellen und ihn zu den umfangreichen Werken von Fiedler und anderen hinführen.

Dafs die eingestreuten mathematischen Erläuterungen nicht als strenge Beweise gelten wollen, ist bei einer Einführung in das stereometrische Zeichnen wohl selbstverständlich. Und dafs es

Digitized by Google

sich nicht um ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie handelt, ist schon hinlänglich hervorgehoben. Es sollte in der That etwas wesentlich anderes in dem Büchlein gegeben werden.

In der Hand des Lehrers wird dasselbe, wie der Verfasser hofft, Nutzen bringen können. Ob es sich für den Gebrauch der Schulen eignet, das zu beurteilen sei der wohlwollenden Prüfung der Fachgenossen überlassen. Indessen sei zugestanden, dafs der Verfasser bestrebt war, den Schulgebrauch für gewisse Arten von Unterrichtsanstalten durch Wahl und Behandlung des Stoffes zu ermöglichen.

Schliefslich stattet er der Verlagsbuchhandlung für das Entgegenkommen bezüglich der kostspieligen Ausstattung den verbindlichsten Dank ab, denn nur durch zahlreiche und möglichst exakte Figurentafeln konnte das erreicht werden, was dem Verfasser als Ziel vorschwebte.

Sei denn das Büchlein eine willkommene und nutzbringende Ergänzung zu jedem Lehrbuche der elementaren Stereometrie!

Hagen, im Mai 1886.

Dr. G. Holzmüller.

Digitized by Google

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	1
	Kapitel I. Ebenflächige Gebilde in Parallelprojektionen	6
§ 1.	Der Würfel und seine Kombinationen in schräger Parallelprojektion	6
§ 2.	Der Würfel und seine Kombinationen in Grundriſs und Aufriſs	9
§ 3.	Das regelmäſsige Oktaëder und seine Kombinationen in verschiedenen Darstellungen	13
§ 4.	Das regelmäſsige Tetraëder, seine Kombinationen und seine Beziehungen zum Oktaëder	15
§ 5.	Das regelmäſsige Pentagon-Dodekaëder und seine Beziehungen zum Pyramidenwürfel	18
§ 6.	Das regelmäſsige Ikosaëder	22
§ 7.	Das gleichgliedrige Trapezoëder	26
§ 8.	Das gleichgliedrige Hexakis-Oktaëder	28
§ 9.	Formeltafel für das gleichgliedrige Krystallsystem	29
§ 10.	Bemerkungen zur Verzeichnung schräg abgeschnittener Prismen und Pyramiden	30
§ 11.	Beispiel einer Durchdringung	31
	Kapitel II. Gebilde mit krummen Flächen in Parallelprojektion	32
§ 12.	Schräge Kreisprojektionen	32
§ 13.	Orthogonal-Projektionen des Kreises	39
§ 14.	Gerader Kreis-Cylinder und Schraubenlinien desselben	41
§ 15.	Der gerade Kreiskegel und seine Mantelfläche mit Rechtecksteilung und den Linien konstanter Steigung	43
§ 16.	Die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels	44
§ 17.	Die Kugel in orthogonaler Projektion	57
§ 18.	Die Kugel in schräger Parallelperspektive	63
§ 19.	Der Ringkörper mit Kreisquerschnitt (Rotationscyklide oder Torus)	64
§ 20.	Die allgemeinere Cyklide	67
§ 21.	Einige Aufgaben über den geraden Kreiskegel	68
§ 22.	Der gerade elliptische Kegel und Cylinder	70

Digitized by Google

Seite

§ 23. Der gerade hyperbolische Kegel und Cylinder 72
§ 24. Parabolischer Kegel und Cylinder 73
§ 25. Das Rotations-Ellipsoid, -Paraboloid und -Hyperboloid 74
§ 26. Die noch übrigen Kegelschnittflächen 78

Kapitel III. Einiges über Zentralprojektionen und über die Malerperspektive 81

§ 27. Zentralprojektion geradliniger Gebilde 81
§ 28. Zentralprojektion des Kreises und der übrigen Kegelschnitte . . . 84
§ 29. Weitere Andeutungen über die Malerperspektive 89
§ 30. Die stereographische Projektion der Kugeloberfläche 94
§ 31. Schlufsbemerkung 100

Digitized by Google

UNIVERSITY
CALIFORNIA.

Einleitung.

Die Stereometrie ist die Wissenschaft von den räumlichen, gesetzmäfsig gestalteten Gebilden. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften und den gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, mit ihrer Messung und Berechnung und endlich mit ihrer Konstruktion. Diese Konstruktion kann eine räumliche sein, d. h. das Gebilde wird im Modell wirklich dargestellt (der Würfel z. B. aus Holz, oder mittels eines Drahtgestelles, oder mit Hilfe des Flächennetzes aus Pappe); sie kann jedoch auch auf der Ebene ausgeführt werden, es ist z. B. auf dem Reifsbrett mit Hilfe des Zirkels und Lineals eine korrekte Projektionszeichnung zu geben.

Die verschiedenen Projektionsmethoden werden in der darstellenden Geometrie, die sich zu einer umfangreichen Wissenschaft entwickelt hat, systematisch behandelt.

Hier soll nur eine methodische Einführung in das stereometrische Zeichnen gegeben werden. Wir werden uns demnach nur mit den einfachsten Darstellungsweisen der wichtigsten Körper beschäftigen und nur so weit vordringen, dafs für die wissenschaftliche Stereometrie, besonders für die konstruierende, eine sichere Grundlage gegeben wird.

Die Frage, wie ein einfach gestalteter Körper, z. B. der Würfel, auf dem Reifsbrett zu zeichnen ist, kann man sich sehr anschaulich durch das entsprechende Drahtmodell und einen leuchtenden Körper beantworten lassen.

Figur 1 stellt ein solches Modell dar, zum Zwecke leichterer Handhabung mit einem Stäbchen versehen. Als leuchtenden Körper benutze man zunächst die Sonne, durch die man den Schatten des Modells scharf auf das Reifsbrett werfen (projizieren) läfst. Die so entstehende Figur nennt man eine Parallelprojektion des

Digitized by Google

Würfels auf die Ebene, weil die projizierenden Lichtstrahlen, die von der sehr weit entfernten Sonne ausgehen, als parallel betrachtet werden können.

Es sind nun zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Läfst man die Sonnenstrahlen senkrecht auf die Ebene des Reifsbretts fallen, so erhält man eine senkrechte Projektion, die auch als orthographische oder Orthogonal-Projektion bezeichnet wird. Fallen hingegen die Strahlen schräg auf das Brett, so entsteht eine schräge Parallel-Projektion.

Es ist sehr lehrreich, die grofse Mannigfaltigkeit der möglichen Zeichnungen dadurch kennen zu lernen, dafs man nicht nur die Stellung der Bildfläche gegen die Sonne vielfach wechselt, sondern auch dem Würfel die verschiedensten Lagen giebt. So sind z. B. Figur 2, 3 und 4 Orthogonal-Projektionen, die man leicht durch geeignete Würfelstellung erreichen wird. Dagegen sind Figur 5 und und 6 schräge Parallel-Projektionen. Bei 3, 4, 5 und 6 ist das hinten liegende, was bei dem massiven Körper unsichtbar sein würde, unterbrochen gezeichnet.

Diese Projektionsarten bezeichnet man auch als Parallel-Perspektiven, und zwar aus folgendem Grunde: Denkt man sich das Auge des Beschauers in die Sonne versetzt, so verdeckt ihm der Drahtwürfel genau diejenigen Stellen der Tafel, welche vorher das Schattengebilde enthielten. Schaltet man ferner zwischen dem Würfel und dem fernliegenden Auge eine durchsichtige Glastafel ein, welche der Reifsbrettfläche parallel ist, so erscheint der Körper auf dem Glase in einer Gestalt, die jenem Schattengebilde kongruent ist. Man könnte das Gesehene mit einem Diamantstifte nachzeichnen und so auf der Glastafel fixieren. Der Name Perspektive erklärt sich also daraus, dafs die Zeichnung genau so ist, wie der Körper durch die Glasfläche hindurch erscheint.

Befindet sich das Auge in grofser Entfernung senkrecht über der begrenzt zu denkenden Bildfläche, so erhält man eine orthogonale Parallelperspektive, befindet es sich schräg über derselben, so handelt es sich um die schräge Parallelperspektive.

Bei jeder Parallelprojektion des Würfels zeigt sich nun, dafs die in Wirklichkeit quadratischen Seitenflächen als Parallelogramme erscheinen. Linien also, die im Raume parallel gerichtet und gleich lang sind, erscheinen auch in der Projektion als parallel und gleich lang. Der Beweis dafür kann mit den leichtesten Hilfsmitteln der Elementargeometrie geführt werden. Ver-

Digitized by Google

halten sich ferner die Längen zweier parallelen Geraden wie $a : b$, so verhalten sich auch ihre Projektionen wie $a : b$.

War jede Würfelkante ein Decimeter lang, so erscheint in der Projektion für drei Kanten, die von einer Ecke ausgehen, die Decimeter-Länge im allgemeinen verschieden. Für diese drei Richtungen ist aber damit die Länge, in der auf ihnen jene Einheit erscheint, fest bestimmt. Bei einiger Übung lernt man es, trotz aller auftretenden Verkürzungen und Verlängerungen (die letzteren sind nur in der Schrägprojektion möglich), aus der korrekten Zeichnung die wirklichen Maſse abzulesen.

Erscheinen die Würfelkanten gleich lang, so nennt man die Projektion eine isometrische. So ist z. B. Figur 6 eine isometrische Schrägprojektion, Figur 7 eine isometrische Orthogonal-Projektion. Den gebräuchlichsten Parallel-Projektionen hat man besondere Namen gegeben, die jedoch ohne wesentliche Bedeutung sind. Die bekanntesten Orthogonal-Projektionen sind die als Grundriſs und Aufriſs bezeichneten.

Ähnliche Experimente, wie mit dem schattenwerfenden Drahtwürfel, mache man mit anderen Drahtkörpern, z. B. mit dem 3-, 4-, 5-, 6seitigen Prisma, dem durch geeignete Drähte veranschaulichten Kreiscylinder oder dem Kreiskegel.

Von den Körpern mit gekrümmter Oberfläche ist der wichtigste die Kugel. Das Experiment mit der im Sonnenschein schattenwerfenden massiven Kugel lehrt Folgendes: Die Orthogonal-Projektion der Kugel ist stets ein Kreis, ihre Schrägprojektion ist stets eine Ellipse. Die Ellipse aber läſst sich definieren als Parallelprojektion eines Kreises. Man muſs also z. B. eine Ellipse erhalten, indem man alle parallelen Sehnen eines Kreises, vom senkrecht schneidenden Durchmesser aus gerechnet, in konstantem Verhältnis verkürzt oder verlängert. In Figur 8 z. B. sind alle Sehnen halbiert, in Figur 9 dagegen um die Hälfte verlängert worden.

Handelt es sich also in der Stereometrie um das Zeichnen der Kugel, z. B. der einem Körper um- oder einbeschriebenen Kugel, so wird es zweckmäſsig sein, die Parallelprojektion zu vermeiden und dafür die Orthogonal-Projektion anzuwenden.

Da wir das Auge nicht in unendliche Entfernung versetzen können, so zeigt uns die Parallel-Perspektive die Gegenstände nicht so, wie wir sie in Wahrheit sehen. Um zu erfahren, wie die Körper

Digitized by Google

aus endlicher Entfernung auf der eingeschalteten Glastafel erscheinen, oder, wie sie aus endlicher Entfernung auf die Reifsbrett-Ebene zu projizieren sind, mache man das Experiment mit dem Drahtwürfel noch einmal, jedoch mit Hilfe eines Lampen- oder Kerzenlichtes, welches einigermafsen scharfe Schatten giebt. (Am besten gelingt der Versuch mit dem elektrischen Bogenlichte, dessen intensive Strahlen nahezu von einem Punkte ausgehen.)

Je nach der Stellung des Lichtes und des Drahtwürfels gegen das Reifsbrett erhält man auch hier die verschiedensten Gestaltungen des Schattengebildes. In Figur 10 und 11 z. B. erscheinen zwei Würfelquadrate wieder als Quadrate, jedoch von ungleicher Gröfse, während die anderen Flächen Paralleltrapeze geben. Beiläufig sei schon jetzt bemerkt, dafs die nicht parallel erscheinenden Kanten sich verlängert in einem Punkte schneiden*). Beide Figuren erhält man, sobald der Würfel mit einer Seitenfläche parallel zur Reifsbrettebene gestellt ist. In Figur 12 sind nur noch die Senkrechten parallel, während die beiden anderen Parallelengruppen sich in je einem Punkte vereinigen. Quadrate sind also nicht mehr vorhanden. Nur diejenigen Würfelkanten sind parallel geblieben, die in der Wirklichkeit zu der Reifsbrettebene parallel gestellt waren. Steht endlich der Würfel mit allen Kanten schräg gegen das Reifsbrett, so hört in der Projektion aller Parallelismus auf, wie in Figur 13. Selbstverständlich ist das Beurteilen der wirklichen Mafse bei allen diesen Zeichnungen schwieriger, als in der Parallel-Perspektive.

Alle zuletzt vorgeführten Projektionen nennt man, da die projizierenden Strahlen von einem im endlichen liegenden leuchtenden Zentrum ausgingen, Zentralprojektionen. Versetzt man das Auge an die Stelle des leuchtenden Körpers und schaltet man zwischen Körper und Auge eine Glastafel ein, die der Reifsbrettfläche parallel ist, so erscheint auf der Tafel der Körper als ein Bild, welches dem Schattengebilde nicht kongruent, wohl aber geometrisch ähnlich ist. Der Name Zentral-Perspektive erklärt sich also ganz ähnlich, wie der der Parallelperspektive.

Da bei dieser Perspektive parallele Würfelseiten im allgemeinen weder als parallel, noch als gleich erscheinen, so ist sie für mathe-

*) Geometrisch ist leicht zu beweisen, dafs die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte zweier Quadrate mit parallelen Seiten stets durch einen Punkt gehen, den äufseren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt beider Figuren.

Digitized by Google

matische Zwecke nicht gut verwendbar. Zwar läfst sich für jeden gesetzmäfsig gestalteten Körper jede verlangte Zentralperspektive mathematisch genau konstruieren, umgekehrt aber ist es nicht ganz leicht, aus der Zeichnung die wirklichen Verhältnisse ohne Weiteres zu erkennen.

Trotzdem ist die Kenntnis dieser Methode von grofser Wichtigkeit, denn jeder Maler zeichnet seine Landschaften, Architekturstücke u. s. w. nach derselben, oder er sollte wenigstens auf Grund jener Prinzipien arbeiten. Deshalb wird diese Projektionsart wohl auch als Maler-Perspektive bezeichnet. Sie soll hier nur anhangsweise besprochen werden.

Wie man aus einer Sprache in die andere übersetzt und aus letzterer in die erstere zurücküberträgt, so hat sich der Zeichner und Mathematiker zu üben, aus der Wirklichkeit in die Projektion und umgekehrt aus der Projektion in die Wirklichkeit zu „übersetzen". Durch energische Übung kann er sein räumliches Vorstellungsvermögen, wie jede andere geistige Fähigkeit, zu beliebiger Vollkommenheit ausbilden.

Digitized by Google

Kapitel I.

Ebenflächige Gebilde in Parallelprojektionen.

§ 1.

Der Würfel und seine Kombinationen in schräger Parallelprojektion.

Aufgabe 1. Den Würfel so zu zeichnen, dafs die Vorder- und Hinterfläche als aufrecht stehende Quadrate erscheinen, während die nicht zu diesen gehörigen Kanten unter $\frac{1}{3}$ Verkürzung und unter dem Neigungswinkel 30^0 gegen die nach rechts gehende Horizontale zu konstruieren sind.

In Figur 14 ist die Zeichnung ausgeführt.

Bemerkung: Wo hat man sich das unendlich ferne Auge oder die schattenwerfende Sonne zu denken? Man errichte in C auf der Ebene der Zeichnung (Fig. 14) ein Lot $CD = AB$ (D ist über der Zeichenfläche schwebend zu denken). Die Raumlinie AD giebt dann die gesuchte Richtung an.

Wir werden in folgendem, wenn nichts Besonderes bemerkt wird, bei Schrägprojektionen stets diejenige wählen, bei der $\frac{1}{3}$ Verkürzung und Neigungswinkel 30^0 mafsgebend sind. Da diese Festsetzung eine ganz willkürliche ist, mag der Kürze halber diese Art der Parallelperspektive bisweilen als „unsere“ Perspektive bezeichnet werden. Was man ferner unter Perspektive mit Neigungswinkel 90^0 (oder allgemeiner α^0) unter Verkürzung $\frac{1}{2}$ (oder allgemeiner $\frac{1}{n}$) zu verstehen hat, ist von selbst klar.

Aufgabe 2. Den aufrecht stehenden Würfel in unserer Parallelperspektive über Eck zu zeichnen, d. h. so, dafs die gegebene Diagonale AB horizontal erscheint.

Aufl. In Fig. 15 ist die gegebene Diagonale AB in ihrer wirklichen Länge horizontal gezeichnet. Man halbiere AB in M,

Digitized by Google

lege $CD = \frac{1}{3} AB$ unter Neigung 30^0 so durch M, dafs $CM = MD$ ist und vollende das Viereck $ACBD$. Die wahre Länge von AC und BC findet man als AE, indem man über AB mit Hilfe des Halbkreises ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck AEB errichtet, denn dies ist die wirkliche Gestalt von ABC. Durch A, B C und D lege man jetzt die Senkrechten AF, BH, CG und DJ sämtlich gleich AE und vollende das Viereck $FGHJ$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Bei den folgenden Aufgaben wird der Würfel mit Abstumpfungsflächen, Abkantungsflächen, aufgesetzten Pyramiden und dergl. versehen. Nach dem Vorgange der Mineralogen werden wir die so entstehenden Körper als Kombinationen des Würfels mit anderen Formen bezeichnen. In der That werden die Würfelflächen dabei mit den Flächen anderer Körper, z. B. des Oktaëders, Rhombendodekaëders etc. kombiniert.

Aufgabe 3. Der Würfel der Aufgabe 1 soll um $\frac{1}{4}$ der Kantenlänge abgestumpft werden.

Aufl. Man schneide von jeder der Kanten, die in dem Punkte B (Fig. 16) zusammentreffen, $\frac{1}{4}$ ihrer Länge ab und verbinde die Schnittpunkte D, E und F. Durch die Dreiecksfläche DEF denke man sich die Ecke B abgeschnitten (abgestumpft). Dasselbe ist an allen Ecken zu wiederholen.

Bemerkung: Wie leicht zu beweisen, sind die Abstumpfungsflächen gleichseitige Dreiecke. Ihre wirkliche Neigung gegen die Grundfläche läfst sich graphisch konstruieren und auch trigonometrisch berechnen. Nach erlangter Kenntnis des Pyramideninhalts kann der Inhalt jedes abgeschnittenen Teiles, also auch der stehen bleibende Körperrest, berechnet werden. Es wird sich später zeigen, dafs die neuen Flächen Oktaëderflächen sind.

Aufgabe 4. Die Abstumpfung soll $\frac{1}{2}$ der Kantenlänge, oder $\frac{2}{3}$ derselben umfassen. Aufserdem sollen die Aufgaben von 3 ab auch an dem über Eck gezeichneten Würfel wiederholt werden.

Aufgabe 5. In den Mittelpunkten der Würfelseiten (aus Aufg. 1) sollen Lote von $\frac{1}{4}$ der Kantenlänge errichtet werden. Durch Verbindung ihrer Endpunkte mit den zugehörigen Würfelecken sind vierseitige Pyramiden zu konstruieren.

Aufl. In Figur 17 sind zunächst die Mittelpunkte der Seiten-

Digitized by Google

flächen als Schnittpunkte der Diagonalen bestimmt. Die Lote in A und B sind horizontal, die in C und D sind vertikal eingetragen. Alle haben die Länge $\frac{1}{4}\ AB$. Das Lot in M ist als ME unter Neigung 30^0 einzuzeichnen und hat als Länge den dritten Teil von der der anderen Lote. Der Endpunkt jedes Lotes ist durch Gerade mit den zugehörigen Quadratecken zu verbinden.

Bemerkung: Die zur Hinterfläche gehörige Pyramide ist weggelassen, um die Zeichnung nicht zu verwirren. Der so entstehende Körper heifst Pyramidenwürfel. In der Mineralogie wird er als Tetrakis-Hexaëder, d. h. als 4 mal 6-Flach bezeichnet. (Der Würfel heifst dort bekanntlich Hexaëder oder 6-Flach.)

Aufgabe 6. Die vorige Konstruktion soll an dem über Eck gezeichneten Würfel durchgeführt werden.

Aufgabe 7. Die Aufgaben 5 und 6 sind dahin zu ändern, dafs die Pyramidenhöhen die halbe Kantenlänge erhalten.

Bemerkung: In Figur 18 ist die eine Aufgabe durchgeführt. Die neuen Flächen sind unter 45^0 gegen die Würfelflächen geneigt. Darum fallen je zwei zu einer zusammen, und die zwischen ihnen liegende Würfelkante wird unsichtbar. Der 24-flächige Körper verwandelt sich also in ein 12-Flach oder Dodekaëder, und da seine Flächen Rhomben sind, heifst er Rhombendodekaëder. In der Mineralogie wird er, da der Granat besonders häufig in dieser Form krystallisiert, auch Granatoëder genannt. Ein regelmäfsiger Körper im stereometrischen Sinne ist er nicht, denn wir haben z. B. an ihm Dreikantecken und Vierkantecken, stumpfe und spitze Kantenwinkel zu unterscheiden.

Zeichnet man die Pyramidenhöhen gröfser als die Hälfte der ursprünglichen Würfelkanten, so hört der Körper auf, konvex zu sein.

Aufgabe 8. Der Pyramidenwürfel der Aufgabe 5 soll an den Pyramidenspitzen um $\frac{3}{4}$ der dortigen Kantenlänge abgestumpft werden.

Bemerkung: Der stehen bleibende Körper läfst sich zugleich als Würfel mit zugeschärften Kanten (Ausdruck der Mineralogie) betrachten.

Aufgabe 9. Das Rhomben-Dodekaëder der Aufgabe 7 soll an den Vierkantecken um $\frac{3}{4}$ der dortigen Kantenlänge abgestumpft werden.

Bemerkung: In Figur 19 ist der stehenbleibende Körper gezeichnet. Er läfst sich auch als abgekanteter Würfel bezeichnen,

Digitized by Google

d. h. als Würfel, dessen Kanten durch Schnittflächen von 45° Neigung entfernt worden sind.

Aufgabe 10. Das Rhombendodekaëder an den Dreikantecken um $\frac{2}{3}$ der dortigen Kantenlänge abzustumpfen.

Bemerkung: In Figur 20 ist der stehen bleibende Körper gezeichnet. Er läſst sich auch als abgekantetes Oktaëder (8-Flach) betrachten.

Aufgabe 11. Den Würfel um $\frac{1}{4}$ der Kantenlänge abzukanten.

Aufl. In Figur 21 sei A eine Ecke des abzukantenden Würfels. Man mache AB, AC und AD gleich $\frac{1}{4}$ der Kantenlänge (AC natürlich auf $\frac{1}{3}$ verkürzt erscheinend) und lege durch B, C und D Parallele zu den Würfelkanten. Dadurch entstehen die unter 45° gegen die Würfelflächen geneigten Abkantungsflächen $LCDM$, $OBDN$ und $PBCR$, die als I, II und III bezeichnet werden mögen. Jetzt müssen die Schnittlinien dieser drei Flächen gezeichnet werden. I und II haben gemein die Punkte X und D, also ist XD ihre Schnittlinie. II und III haben aus gleichem Grunde die Schnittlinie YB, III und I die Schnittlinie CZ. Da nun die Schnittlinien dreier Ebenen entweder parallel sind, wie bei dem dreiseitigen Prisma, oder sich in einem Punkte schneiden (warum?), so treffen sich die drei Schnittlinien in einem Punkte V, so daſs von I stehen bleibt $LXVZM$, von II dagegen $OXVYN$, von III endlich $PZVYR$. Wird an den anderen Würfelecken dasselbe gemacht, so bleibt schlieſslich eine Figur wie 19 stehen.

Aufgabe 12. Die letzten Aufgaben sind für die Würfelstellung über Eck zu lösen.

§ 2.

Der Würfel und seine Kombinationen in Grundriſs und Aufriſs.

Unter Grundriſs eines Körpers versteht man seine Orthogonalprojektion auf eine Horizontalebene, unter Aufriſs seine Orthogonal-Projektion auf eine Vertikalebene. Da das Reiſsbrett aber nur eine Ebene hat, so muſs man sich beide Ebenen in diese eine gelegt denken.

In Figur 22 sei $FECD$ das senkrecht stehende Reiſsbrett und $ABCD$ die in ihm liegende Aufriſsebene. Die Grundriſsebene gehe durch AB und stehe in Wirklichkeit senkrecht auf der Bildfläche. Durch Drehung um AB denkt man sich aber ihre Lage so lange geändert, bis sie als $ABEF$ in die Zeichnungsebene fällt.

Digitized by Google

Der Punkt X sei die Aufrifsprojektion einer Geraden, die in X auf der Aufrifsebene senkrecht steht, der Punkt X_1, senkrecht darunter gezeichnet, das Bild einer Geraden, die in X_1 auf der Grundrifsebene senkrecht steht. Dreht man die Grundrifsebene in ihre wirkliche Lage zurück, so schneiden sich die beiden Lote in einem vor der Aufrifsebene und über der Grundrifsebene schwebenden, also nicht gezeichneten Punkte K, und zwar so, dafs XYX_1K ein Rechteck wird. Folglich:

Die Punkte X und X_1 in Figur 22 sind die Projektionen eines Raumpunktes K, der um die Strecke YX_1 vor dem Aufrifspunkte X, und um die Strecke YX über dem Grundrifspunkte X_1 schwebend zu denken ist.

Ebenso sind in derselben Figur P und P_1 die Projektionen eines gewissen Raumpunktes, desgleichen Q und Q_1, demnach sind PQ und P_1Q_1 die Projektionen der diese Punkte verbindenden Geraden.

So kann man zu jedem Punkte und zu jeder Geraden des Raumes den Grundrifs und Aufrifs zeichnen. Umgekehrt läfst sich aus jedem Punktpaare X resp. X_1 die Lage des entsprechenden Raumpunktes, aus jedem Geradenpaare PQ und P_1Q_1 die Lage und Länge der entsprechenden Raumlinie leicht ermitteln. Man merke also in erster Linie, dafs in der Zeichnung die zusammengehörigen Grund- und Aufrifspunkte senkrecht untereinander liegen.

Diese Darstellungsweise, die sich durch die folgenden Übungsaufgaben noch weiter erläutern wird, ist für den Bau- und Maschinentechniker, ebenso für den kunstgewerblichen Zeichner, nicht weniger für den Mathematiker, von gröfster Wichtigkeit.

Aufgabe 13. Der Würfel soll in Grundrifs und Aufrifs gezeichnet werden, jedoch in verschiedenen, näher zu bestimmenden Stellungen.

Aufl. Figur 23a giebt den Grundrifs und Aufrifs des Würfels für die einfachste Lage an. Im Aufrifs ist er von vorn gesehen, im Grundrifs von oben. Im Aufrifs verdecken die vorderen Punkte A, B, C, D die hinteren Punkte E, F, C, G, die deshalb eingeklammert daneben geschrieben sind. Im Grundrifs verdecken die oberen Punkte D, C, G, H die unteren Punkte A, B, F, E. Letztere sind daher ebenfalls eingeklammert bezeichnet. Da XY die Schnittlinie von Grundrifs und Aufrifs ist, so steht der Würfel auf der Grundrifsebene. Sollte er um h höher stehen, so wäre die Aufrifszeichnung um h nach oben zu verschieben.

Digitized by Google

In Figur 23b ist die Aufgabe gelöst, diesen Würfel zu zeichnen, nachdem er um die Kante AE gedreht ist, z. B. um 30°. Die Aufriſsfigur ändert sich dabei nicht in der Gestalt, sondern nur in der Lage. Die Grundriſspunkte aber haben sich in der Zeichnung nur horizontal verschoben, denn die Projektion ihres wirklichen, kreisbogenförmigen Weges auf die Grundriſsebene ist jedesmal eine horizontale Gerade. Man erhält also die neue Gestalt der Grundriſsfigur, indem man jeden ihrer Punkte horizontal verschiebt, und zwar so weit, bis er senkrecht unter dem entsprechenden Punkte der neuen Aufriſsfigur liegt. Die verdeckte Linie AE im Grundriſs ist unterbrochen gezeichnet.

Um diese noch immer spezielle Stellung in eine allgemeinere zu verwandeln, drehe man die neue Grundriſsfigur um einen beliebigen Winkel, z. B. um 35°. Die neue Aufriſsfigur ist in 23c dadurch konstruiert, daſs man die Aufriſspunkte der vorigen horizontal verschoben hat (warum?), und zwar so weit, bis sie senkrecht über den neuen Grundriſspunkten liegen.

In Figur 23d ist endlich die dritte Aufriſsfigur um 20° gedreht worden und die neue Grundriſsfigur mit Hilfe der Horizontalverschiebung entstanden. Hier treten oben und unten alle Punkte und alle Geraden auseinander, so daſs man sagen kann, der Würfel sei jetzt in allgemeinster Lage gezeichnet. Jede beliebige Stellung kann man nach dieser Methode durch mehrere Drehungen erreichen.

Man kann die Konstruktion bedeutend vereinfachen, indem man nur für die drei von A ausgehenden Kanten AB, AD und AE die obigen Transformationen durchführt und die Parallelogramme zum Schluſs vollendet. Noch weiter gehende Vereinfachungen lehrt die darstellende Geometrie.

[Bemerkung: Soll eine Figur, wie der Aufriſs von 23d, die Orthogonalprojektion eines Würfels sein, so kann man AB, AD und AE nicht ohne weiteres nach Länge und Richtung willkürlich hinzeichnen. Es sind vielmehr von diesen sechs Bestimmungen nur vier willkürlich, die beiden anderen aus ihnen geometrisch direkt bestimmbar. Die orthographische Axonometrie ist derjenige Teil der darstellenden Geometrie, dessen Aufgabe es ist, die Körper in der allgemeinen Lage, wie sie z. B. Figur 23d für den Würfel zeigt, direkt, also ohne die Vorfiguren a, b und c, hinzuzeichnen. Nur um Irrtümern vorzubeugen und zugleich eine Andeutung über das Wesen der Axonometrie zu geben, teilen wir einiges über solche Würfelzeichnungen, die unabhängig von den obigen Drehungsmetho-

Digitized by Google

den gefunden werden, mit. Es sei dazu diejenige Konstruktion benutzt, die sich auf einen gewissen Gaufsschen Satz stützt. Derselbe ist nur dem vorgeschrittenen Mathematiker verständlich und lautet: Sind drei von einem Punkte ausgehende Strecken Orthogonal-Projektionen von Würfelkanten, so ist die Summe ihrer Quadrate gleich Null.

Daraus ergiebt sich z. B. die Lösbarkeit folgender **Aufgabe 14.** Die Linien AB und AD seien nach Gröfse und Richtung willkürlich gegeben. AE soll so konstruiert werden, dafs die drei Linien als Orthogonalprojektionen von drei Würfelkanten betrachtet werden können (Figur 24).

Aufl. Man mache Dreieck ADF ähnlich ABD, indem man $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta$ macht, und vollende das Parallelogramm $BAFG$. Darauf verlängere man GA über A hinaus um sich selbst bis H. Die Halbierungslinie des Winkels BAH giebt dann die Richtung der dritten Würfelkante AE an, deren Länge als mittlere Proportionale von AB und AH zu konstruieren ist. Letztere findet man bekanntlich, indem man $AJ = AB$ macht, über HJ als Durchmesser einen Halbkreis schlägt und in A auf diesem das Lot AK errichtet. Macht man $AE = AK$, so ist E der Endpunkt der dritten Würfelkante, die übrigens auch als Verlängerung über A hinaus gezeichnet werden kann, so dafs man noch einen zweiten Würfel erhält. Die Vervollständigung der Figur ist einfach. Noch ist zu erwähnen, dafs jede solche Figur zwei Auffassungen zuläfst. Statt nämlich die von X ausgehenden Kanten zu punktieren, konnte man diese auszeichnen und die von B ausgehenden punktieren. Dann ist X vorn, B hinten gedacht. Die Zahl der Lösungen ist also 4, von denen je zwei sich decken.

(Der Beweis für die Richtigkeit ergiebt sich daraus, dafs AB nach Länge und Richtung als Einheit angenommen worden ist. AF ist das Quadrat der Strecke AD, AB ist sein eigenes Quadrat, AH ist die Umkehrung der Resultante beider Strecken, also $AB + AF + AH$ im Sinne der Streckentheorie gleich Null. AE endlich ist die Quadratwurzel aus AH.)

Die drei entsprechenden Aufgaben, die jetzt gelöst werden können, sind folgende:

Aufgabe 15. Gegeben AB nach Gröfse und Richtung, AD und AE nach Richtung. Der Würfel soll vollendet werden.

Digitized by Google

Aufgabe 16. Gegeben AB nach Gröfse und Richtung, AD und AE nach der Gröfse. Den Würfel zu vollenden.

Aufgabe 17. Gegeben AB nach Gröfse und Richtung, AD nach Gröfse, AE nach Richtung. Den Würfel zu vollenden.

Für besonders geeignete axonometrische Darstellungen hat man Tabellen über die auftretenden Längenverhältnisse und Winkel angefertigt. Diese Tabellen können auf dem Wege der Rechnung oder der obigen Konstruktionen hergestellt werden.

Von den obengenannten Fundamentalaufgaben aus ist man imstande, sich die ganze Axonometrie selbständig aufzubauen, d. h. die wichtigsten stereometrischen Gestalten korrekt zu konstruieren, ohne, wie vorher, von Grundrifs und Aufrifs einfachster Art auszugehen und durch Drehungen zur allgemeinen Lage zu gelangen.]

Der Würfel und seine Kombinationen spielen in der Mineralogie eine wichtige Rolle. In solchen Formen krystallisieren z. B. Steinsalz, Flufsspat, Granat, Silber, Kupfer, Gold, Bleiglanz, Schwefelkies.

§ 3.

Das regelmäfsige Oktaëder und seine Kombinationen in verschiedenen Darstellungen.

Aufgabe 18. Das regelmäfsige Oktaëder (8-Flach) in unserer schrägen Parallelperspektive zu zeichnen, und zwar in einfachster Lage.

Aufl. Man ziehe AB (Fig. 25) senkrecht gegen CD, und zwar so, dafs $MA = MB = MC = MD$ ist, lege sodann EF durch M unter 30^0 gegen AB geneigt, so, dafs $ME = MF = \frac{1}{3} AM$ ist. Diese Figur bezeichnet man als die des regelmäfsigen Axenkreuzes. Verbindet man C und D mit A, E, B und F, und zeichnet man das Parallelogramm $AEBF$, so ist das regelmäfsige Oktaëder konstruiert. Dasselbe ist von gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Bemerkung: Warum sind die Dreiecke in Wirklichkeit gleichseitig? — Die nicht horizontalen Kanten haben die Neigung 45^0. Warum? — Die Neigung der Flächen läfst sich durch Zeichnung und durch trigonometrische Rechnung bestimmen. Wie?

Aufgabe 19. Das vorige Oktaëder um $\frac{1}{4}$ der Kantenlänge abzustumpfen.

Bemerkung: Figur 26 ist leicht aus Figur 25 herzustellen.

Aufgabe 20. Auf die Oktaëderflächen gerade Pyramiden von gegebener Höhe aufzusetzen.

Digitized by Google

Aufl. Soll auf ein gleichseitiges Dreieck eine gerade Pyramide aufgesetzt werden, so hat man zunächst im Mittelpunkte, d. h. im Durchschnittspunkte seiner Mittellinien ein Lot zu errichten. In Figur 25 steht nun über jedem Oktaëderdreieck eine solche Pyramide mit der Spitze M, also nach innen gerichtet. Verbindet man also M mit dem Mittelpunkte eines solchen Dreiecks, z. B. von AEC, so hat man die gesuchte Lotrichtung. Die Konstruktion in Figur 27 ist also folgendermafsen durchzuführen: Man halbiere AE in K, ziehe KC und schneide davon den dritten Teil KX ab. Man ziehe MX und verlängere diese Linie über X hinaus. Soll nun z. B. die Höhe XY der dritte Teil von MX sein, so ist Y leicht zu konstruieren. Die Geraden AY, CY und EY sind die gesuchten Pyramidenkanten.

Ebenso verfahre man mit den anderen Dreiecken.

Bemerkung: Bei richtiger Zeichnung bilden Y, Z, V und W ein Quadrat. — Der Körper heifst das Pyramiden-Oktaëder, oder Triakis-Oktaëder, d. h. 3 mal 8-Flach.

Aufgabe 21. Das Rhomben-Dodekaëder aus dem Oktaëder zu konstruieren.

Aufl. Man beginne, wie in der vorigen Zeichnung, verlängere aber MX so weit, bis der Endpunkt Y senkrecht über K liegt. Macht man es unten mit V ebenso, so fallen die Flächen AEY und AEV als senkrecht stehende zusammen. Verfährt man an den anderen Stellen ebenso, so hat man das Rhombendodekaëder genau so, wie früher in Figur 18.

Aufgabe 22. Das Pyramidenoktaëder der Figur 27 soll an den Pyramidenspitzen um $\frac{3}{4}$ der dortigen Kantenlänge abgestumpft werden.

Bemerkung: Die aus Figur 27 leicht abzuleitende Zeichnung ist zugleich die des an den Kanten zugeschärften Oktaëders.

Aufgabe 23. Das Oktaëder so abzukanten, dafs ein gegebener Bruchteil der Kanten wegfällt.

Bemerkung: Die Konstruktion geschieht nach Analogie von Aufgabe 11. Das Resultat entspricht der Figur 20, giebt also ein an den Dreikantecken abgestumpftes Rhombendodekaëder.

Aufgabe 24. Axenkreuz und Oktaëder in Grundrifs und Aufrifs in verschiedenen Lagen zu zeichnen.

Bemerkung: In Figur 28 a, b und c ist die Aufgabe gelöst. Die einfachste Stellung in 28a erläutert sich selbst. Die beiden anderen sind, wie bei dem Würfel, durch die Drehungsmethode gefun-

Digitized by Google

den, d. h. in 28b ist oben gedreht und unten horizontal verschoben, in 28c unten gedreht und oben verschoben. Die allgemeinste Lage erhält man, indem man noch einmal oben dreht und unten verschiebt. Verbindet man die Endpunkte der Axen durch Gerade mit einander, so ist das Oktaëder gezeichnet.

[**Aufgabe 25.** Für das Oktaëder sollen dieselben axonometrischen Aufgaben gelöst werden, die in Aufgabe 14 bis 17 für den Würfel gelöst wurden.

Bemerkung: Die Halbaxen des Oktaëders verhalten sich dabei ebenso, wie Würfelkanten.]

Aufgabe 26. Die bereits besprochenen Kombinationen des Oktaëders in Grundrifs und Aufrifs zu zeichnen, und zwar in allgemeinster Lage.

Aufl. Man zeichnet das Oktaëder selbst in allgemeinster Lage und operiert sodann an ihm ebenso, wie bei der Schrägperspektive.

[Aufgabe 27. Dasselbe soll im Anschlufs an Aufgabe 25 durch direkte axonometrische Zeichnung geleistet werden.]

Bemerkung: Das regelmäfsige Oktaëder nebst seinen Kombinationen ist für die Mineralogie von gleicher Bedeutung, wie der Würfel. In diesen Formen krystallisieren z. B. Magneteisen, einige andere Eisenerze, Rotkupfer, Schwefelkies, Bleiglanz, Silberglanz, Gold, Platin, Alaun u. s. w.

§ 4.

Das regelmäfsige Tetraëder, seine Kombinationen und seine Beziehungen zum Oktaëder.

Das regelmäfsige Tetraëder (Vierflach) ist die regelmäfsige dreiseitige Pyramide, die also nur von gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist.

Aufgabe 27. Das regelmäfsige Tetraëder für verschiedene Lagen in Grund- und Aufrifs zu konstruieren.

Aufl. In Figur 29 ist im Grundrifs das Basisdreieck ABC gezeichnet, und zwar so, dafs AB senkrecht steht; ein anderes, ABE, daneben. Denkt man sich das letztere um AB gedreht, so wandert E in Wirklichkeit auf einem Halbkreise nach C. Dieser Halbkreis ist im Aufrifs als solcher dargestellt, im Grundrifs erscheint er als die Gerade CE. Irgendwo auf CE resp. der Höhe CD mufs die Spitze der Pyramide im Grundrifs liegen. Ebenso kann man es mit den an AC und an BC anstofsenden Dreiecken machen. Da aber die drei Höhen des Dreiecks ABC im Grundrifs sich in einem

Digitized by Google

Punkte F schneiden, so ist F gleichzeitig die Darstellung der Spitze M und es sind AM, BM und CM die Zeichnungen der fehlenden Pyramidenkanten. Im Aufrifs endlich findet man die Pyramidenspitze senkrecht über dem M des Grundrisses auf dem Halbkreise über CE. Die Zeichnung ist also leicht zu vollenden.

Durch oben und unten abwechselnde Drehungen und Verschiebungen erhält man die allgemeinen Lagen.

Bemerkung: Im Folgenden soll die Methode, die durch das Aufklappen der Flächen zur Konstruktion der wirklichen Gestalt führt, stets als Aufklappmethode bezeichnet werden. Nach ihr kann man jeden Körper zeichnen, dessen „Netz" man kennt. So stellt z. B. Figur 30 das Netz des regelmäfsigen Tetraëders vor. Aus solchen Netzen werden die Papp-Modelle der Körper verfertigt.

Aufgabe 28. Die Figur 29 soll in unsere Parallelperspektive umgesetzt werden.

Aufl. Zunächst ist die Grundrifsfigur ABC in Parallelperspektive zu zeichnen. Zu diesem Zwecke legt man CD horizontal hin (Figur 31), trägt AB unter 30^0 Neigung und $\frac{1}{3}$ Verkürzung an und vollendet das Dreieck ABC. Macht man $DF = \frac{1}{3} DC$ und zieht man das Lot FM gleich dem Aufrifslote FM in Figur 29, so hat man die Spitze der Pyramide, die nun leicht zu vollenden ist.

Aufgabe 29. Den Mittelpunkt des regelmäfsigen Tetraëders zu konstruieren (Fig. 32).

Aufl. Ist FM die Höhe des Tetraëders, und schneidet man von F aus den vierten Teil dieser Höhe ab, so hat man den Mittelpunkt Z desselben.

Bemerkung: Zieht man noch MD, und macht man $DG = \frac{1}{3} DM$, so ist CG genau ebenso eine Höhe des Tetraëders, wie MF. Dafs der Schnittpunkt Z der beiden Höhen, also der Mittelpunkt, mit dem oben konstruierten Punkte Z zusammenfällt, ergiebt sich zus der Ähnlichkeit der Dreiecke CZM und FGZ. Da nämlich $DG = \frac{1}{3} DM$, so ist auch $FG = \frac{1}{3} CM$, folglich auch $FZ = \frac{1}{3} ZM$, also $FZ = \frac{1}{4} FM$. Ebenso, wie CG die Höhe FM in jenem Punkte Z trifft, so treffen auch die anderen Höhen FM in Z. Da nun alle Höhen gleich sind, so ist auch Z von allen Ecken der Pyramide gleichweit entfernt, ebenso von allen Flächen des Körpers. Der Name Mittelpunkt ist also vollständig berechtigt.

Bemerkung: In gleicher Weise läfst sich zeigen, dafs die Linien von den Ecken des unregelmäfsigen Tetraëders nach dem

Digitized by Google

UNIVERSITY

Mittellinien-Schnittpunkte der Gegenfläche sich in einem Punkte schneiden, der von jeder $\frac{1}{4}$ der Länge abschneidet.

Aufgabe 30. Ein regelmäfsiges Tetraëder in Parallelperspektive zu zeichnen, auf dessen Flächen in den Mittelpunkten Lote errichtet sind, die dem fünften Teile der Tetraëderhöhe gleich sind. Diese Lote sollen die Spitzen von Pyramiden sein, die den Tetraëderflächen aufgesetzt sind.

Aufl. Man verlängere jede Höhe des Tetraëders über die Basisfläche hinaus um $\frac{1}{5}$ der Länge und verbinde die neuen Endpunkte mit den Ecken der zugehörigen Fläche (Figur 33).

Bemerkung: Der entstehende Körper, dessen Pyramidenhöhe auch eine andere sein darf, heifst Pyramiden-Tetraëder oder Triakis-Tetraëder, d. h. 3 mal 4-Flach.

Aufgabe 31. An einem regelmäfsigen Tetraëder sollen die Kanten halbiert und die Halbierungspunkte miteinander verbunden werden. Was entsteht?

Bemerkung: In Figur 34 ist das Verlangte durchgeführt. Es ist leicht zu beweisen, dafs die entstehende Figur ein regelmäfsiges Oktaëder giebt, welches in der Figur mit einer seiner Flächen aufliegt.

Aufgabe 32. Das regelmäfsige Tetraëder aus dem Oktaëder dadurch abzuleiten, dafs man die Flächen des letzteren abwechselnd stehen und wegfallen läfst, und aus den stehen bleibenden durch Verlängerung einen geschlossenen Körper bildet.

Aufl. In Figur 35 ist ein regelmäfsiges Oktaëder in Parallelperspektive und in unterbrochenen Linien gezeichnet. Man lasse die Flächen ABE, CDE, BCF und ADF wegfallen. Von den stehen bleibenden Flächen gehen ADE und BCE durch die Parallelen AD und BC, verlängert schneiden sie sich also in einer „Dachfirste“ XW, die parallel zu AD und BC ist. Ebenso geben ABF und DCF die „Dachfirste“ (Schnittlinie) YZ parallel zu AB und CD; ABF und CBE geben die Schnittlinie XY parallel zu AF und EC; BFA und ADE geben die Schnittlinie XZ parallel zu BF und ED u. s. w. Der Gesamtkörper $XYWZ$ ist das gesuchte Tetraëder.

Bemerkung: Figur 35 ist dieselbe wie 34, nur in anderer Lage, die Konstruktion selbst eine Umkehrung der vorigen. Man erhält dasselbe, wenn man auf die Oktaëderflächen regelmäfsige Tetraëder aufsetzt. Die Krystallographie nennt jeden Körper, der dadurch entsteht, dafs man von einem Krystall die eine Hälfte der Flächen in

Digitized by Google

gesetzmäfsiger Weise wegfallen, die andere aber stehen läfst, den Halbflächner oder die Hemiëdrie des letzteren.

So ist also das regelmäfsige Tetraëder die Hemiëdrie des regelmäfsigen Oktaëders. Einige andere Halbflächner werden wir noch kennen lernen. — Offenbar sind in der Figur die Tetraëderkanten doppelt so lang als die Oktaëderkanten.

Aufgabe 33. Das regelmäfsige Tetraëder um einen Bruchteil der Kanten abzustumpfen (Abstumpfung um die Hälfte giebt z. B. das Oktaëder).

Aufgabe 34. Dasselbe um einen Bruchteil der Kanten abzukanten.

Aufgabe 35. Das Pyramiden-Tetraëder an den Pyramidenspitzen gleichmäfsig abzustumpfen. (Man kann dadurch das zugeschärfte Tetraëder erhalten.)

Bemerkung: In Tetraëderform krystallisieren z. B. Zinkblende und Fahlerz.

§ 5.

Das regelmäfsige Pentagon-Dodekaëder und seine Beziehungen zum Pyramidenwürfel.

Dafs das regelmäfsige Pentagon-Dodekaëder (Fünfecks-Zwölfflach) wirklich existiert, werde zunächst als richtig angenommen, womit sich die meisten Lehrbücher der Stereometrie zu begnügen pflegen. Es soll versucht werden, den Aufbau des Körpers aus regelmäfsigen Fünfecken nach der Aufklappmethode zu verfolgen und den Vorgang in Grund- und Aufrifs zu fixieren.

Aufgabe 36. Das regelmäfsige Pentagon-Dodekaëder in Grund- und Aufrifs für eine besonders einfache Stellung zu zeichnen.

Aufl. In Figur 36 sind zunächst drei regelmäfsige Fünfecke $ABCDE$, $AFGHB$ und $AEXYZ$ im Grundrifs aneinander gelegt, und zwar so, dafs AB vertikal erscheint. Die gleichnamigen Punkte im Aufrifs sind die entsprechenden. Klappt man Fünfeck $AFGHB$ um die Kante AB, so bewegt sich jeder seiner Punkte auf einem Kreise, der im Aufrifs als Kreis um $A_1(B_1)$, im Grundrifs als Horizontale erscheint. Im Grundrifs wandert H in der Richtung HC, G in der Richtung GD, F in der Richtung FE. Klappt man gleichzeitig das Fünfeck $AEXYZ$ um die Kante AE, so wandert im Grundrifs der Punkt Z in der Richtung ZB. Die Linien FE und ZB schneiden sich in einem Punkte O. Dreht man beide Fünf-

Digitized by Google

ecke so weit, dafs F nach O und Z nach O wandert, so legen sich die Linien AF und AZ in der Kante AO aneinander, d. h. der erste Schritt zum Aufbau des Körpers ist geschehen. Im Aufrifs ist F so weit nach oben gedreht, dafs es in O_1, d. h. senkrecht über O, festgelegt ist. Durch die Verlängerung von A_1O_1 findet man den Schnittpunkt N_1 mit dem anderen Kreise. In N also, d. h. senkrecht unter N_1, ist die Wanderung des Punktes G zu Ende, d. h. $AONPB$ ist die Zeichnung des einen Fünfecks in der neuen Lage im Grundrifs, die gerade Linie A_1N_1 mit den Punkten $A_1O_1N_1P_1B_1$ giebt die neue Lage im Aufrifs an.

Um den Grundrifs zu vollenden, hat man um den Mittelpunkt M des einen Fünfecks einen Kreis zu schlagen, der durch N resp. O geht, wobei sich übrigens herausstellen wird, dafs beide Punkte auf demselben Kreise liegen, was hier nur vorläufig bemerkt werden soll. Demnach gruppieren sich um das horizontale Fünfeck im Grundrifs die fünf benachbarten so, dafs sie ein regelmäfsiges Zehneck bilden. Die andere Hälfte der Flächen erscheint im Grundrifs genau ebenso, nur ist das oberste Fünfeck gegen das unterste so gelegen, dafs den Ecken des einen die Seiten des anderen entsprechen.

Ist dieses Resultat einmal bekannt, so läfst sich die Aufgabe für den Grundrifs schneller lösen.

Die Aufrifsfigur ist nun leicht vollendet: die Horizontale durch O_1 giebt die Höhe der einen Punktschicht an, die Horizontale durch N_1 die einer zweiten Schicht. Durch senkrechtes Heraufprojizieren aus dem Grundrifs findet man die Punkte J_1, L_1, S_1, U_1 leicht auf. Die oberste Punktschicht liegt genau so hoch über N_1, J_1, S_1, wie die Schicht U_1, L_1, O_1 über D_1, E_1, A_1. Damit ist die Aufgabe gelöst.

[Für mathematische Zwecke läfst sich an dieser Stelle die Notwendigkeit der Existenz des Pentagondodekaëders nachweisen, d. h. es läfst sich zeigen, dafs das Netz von 12 regelmäfsigen Fünfecken wirklich einen geschlossenen Körper geben mufs. In Figur 37 sind drei der Fünfecke mit ihren umgeschriebenen Kreisen gezeichnet. Zwei dieser Kreise schneiden sich in O, und aus der Betrachtung der Fünfeckswinkel ergiebt sich leicht, dafs der Peripheriewinkel $OAF = 18^0$ ist. Da ferner die Horizontale durch F gleichfalls mit FA einen Winkel von 18^0 bildet, so geht sie, wie leicht zu zeigen, durch den Kreisschnitt O, und AO ist sowohl für den Kreis N, als auch für die Kreise J und M die Seite des regelmäfsigen einbeschriebenen Zehnecks. Bezeichnet man diese mit g, den Kreisradius mit r, so

Digitized by Google

ist nach bekannter Rechnung (goldner Schnitt) $g = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. Da nun OA (ebenso PB) verlängert durch M geht, so ist

$$MO = r + g.$$

Es ist aber auch MK in L nach dem goldenen Schnitt geteilt, denn $KB = BL = ML$ ist die Zehnecksseite, folglich ist auch

$$ML + LN = MN = r + g,$$

d. h. der Kreis um M mit Radius MO geht durch den Kreismittelpunkt N.

Jetzt mufs bewiesen werden, dafs der Weg des Punktes G beim Aufklappen genau bis N geht. Läfst sich aber beweisen, dafs

$$XZ : XN = XY : XG$$

ist, so läfst sich in der That das Fünfeck $ABPNO$ als Aufklappung des Fünfecks $ABHGF$ betrachten. Die Proportion ist aber richtig, denn es ist $XZ = r - LX - ZN = r - \frac{r-g}{2} - \frac{g}{2} = \frac{r}{2}$,

$$XN = r - LX = \frac{r+g}{2},$$

$$XY = XN + \frac{g}{2} = \frac{r+2g}{2},$$

$$XG = XN + r = \frac{3r+g}{2}.$$

Die obige Proportion reduziert sich also auf

$$r : r + g = r + 2g : 3r + g.$$

oder auf

$$r^2 = rg + g^2.$$

Diese Gleichung ergiebt sich aber als richtig, sobald man den Wert $g = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ einsetzt. Die obige Proportion war also ebenfalls richtig.

Damit ist bewiesen, dafs die 6 untersten Flächen als regelmäfsiges Zehneck erscheinen müssen. Dasselbe mufs demnach mit den restierenden 6 Flächen der Fall sein. Beide Körperhälften müssen sich also schliefsend aufeinander klappen lassen, so dafs eben, wie behauptet, ein geschlossener Körper entsteht.

Bemerkung: Es läfst sich aus dem paarweisen Parallelismus im Aufrifs der Figur 36 leicht beweisen, dafs die Linie J_1L_1 eine Symmetrielinie ist, und dafs dasselbe von der nicht gezeichneten Linie A_1W_1 gilt. Man suche auch zu beweisen, dafs die Punkte $E_1 G_1 H_1 S$ ein Quadrat bilden, ein Umstand, der bei einer späteren Betrachtung zur Geltung kommen wird.

Digitized by Google

Aufgabe 37. Mit Figur 36 sollen die üblichen Drehungen in Grundrifs und Aufrifs vorgenommen werden.

Aufgabe 38. Aus Figur 36 soll die Parallel-Perspektive des Pentagon-Dodekaëders abgeleitet werden.

Aufl. Man ziehe (Figur 38) die Schichtenlinien AB, CD, EF, GH kongruent zu den vier Schichtenlinien im Aufrifs von Figur 36 und markiere auf jeder denselben Teilpunkt, wie dort. In A und H lege man unter 30^0 den dritten Teil von AB in Figur 36 so an, dafs A und H Halbierungspunkte sind; durch J und M lege man ebenso den dritten Teil von CE in Fig. 36. Dies giebt die perspektivischen Fünfecke BN_1Y_1YN und $XVGWZ$. Ebenso lege man durch C und F den dritten Teil von OP (Figur 36), durch K und L den dritten Teil von LR (Figur 36). Dadurch erhält man die Schichtpunkte $OQDPO_1$ und $UTSER$. Die nötigen Verbindungslinien der genannten Punkte vollenden die Zeichnung des Körpers.

Aufgabe 39. Der Halbflächner des Pyramidenwürfels soll in Grundrifs und Aufrifs gezeichnet werden.

(Im besonderen Falle wird dieser Halbflächner das reguläre Pentagon-Dodekaëder, im allgemeinen entsteht nicht dieses, sondern ein anderes Pentagon-Dodekaëder, welches als das symmetrische bezeichnet werden soll.)

Aufl. Wie bei den früher behandelten Halbflächnern läfst man die Flächen des Pyramidenwürfels abwechselnd stehen und wegfallen. Ist z. B. Figur 39 der Pyramidenwürfel im Aufrifs, so kann man die mit + bezeichneten Flächen stehen lassen, während die mit — bezeichneten wegfallen. Die ersteren sind so weit auszudehnen, dafs der Körper wieder schliefst. Die Fläche DCG und die durch sie verdeckte geben eine Dachfirste durch G, KL, die in Figur 40 parallel zu DC ist und so weit reicht, bis sie von den als Linien erscheinenden Flächen CF und DH getroffen wird. Unten ist es ebenso, d. h. es entsteht die Dachfirste MN, die bis zum Schnitte mit HA und FB reicht. Die Flächen AJD und BJC geben eine senkrechte Schnittlinie OP, die eben so lang ist, wie KL. Die Fünfecke sind nun leicht zu vollenden, wie es in Figur 40 geschehen ist.

[Bemerkung: Dafs die Fünfecke im allgemeinen nicht regelmäfsige, sondern nur einfach symmetrische werden, ist selbstverständlich. Soll das Pentagon-Dodekaëder regelmäfsig werden, so mufs der Pyramidenwürfel eine näher zu bestimmende Höhe haben. Um diese zu finden, zeichne man ein reguläres Fünfeck, dessen Diagonale RS (Figur 41) gleich der Würfelkante CD in Figur 40 ist. Offen-

Digitized by Google

bar ist dann CF in Figur 40 gleich UX in Figur 41, denn KF ist das seitwärts gesehene Fünfeck. Ein Kreisbogen um C, dessen Radius gleich UX ist, wird die Horizontale durch J in dem gesuchten Punkte F treffen. Hat man erst diese Pyramidenspitze, so ist alles andere leicht zu vollenden. Die Figur wird kongruent zu Figur 36 im Aufrifs, nur in andere Lage gedreht.]

Aufgabe 40. Dieselbe Aufgabe soll an der parallel-perspektivischen Zeichnung des Pyramidenwürfels durchgeführt werden.

Aufgabe 41. Dasselbe soll an einer (direkt zu findenden) axonometrischen Würfelzeichnung allgemeiner Lage durchgeführt werden.

Bemerkung: Auch an dem Pentagon-Dodekaëder kann man durch Kombinationen mit anderen Flächen Abstumpfungen, Abkantungen und Zuschärfungen vornehmen, die für die Krystallographie von Bedeutung sind.

Das regelmäfsige Pentagon-Dodekaëder kommt in der Mineralogie nicht vor, wahrscheinlich aus Gründen der Irrationalität.

Das symmetrische Pentagon-Dodekaëder dagegen spielt eine nicht unwichtige Rolle. Es ist die Form, in welcher der Schwefelkies krystallisiert, von dessen Namen Pyrit der Körper auch die Bezeichnung Pyritoëder trägt. Auch der Glanzkobalt zeigt diese Form, jedoch mit voller Abstumpfung der früheren Würfelecken, so dafs von Figur 40 nur die Figur 42 stehen bleibt, die 20 teils gleichseitige, teils gleichschenklige Dreiecke enthält, also eine Art von unregelmäfsigem Ikosaëder vorstellt. In einem speziellen Falle nur entsteht das regelmäfsige Ikosaëder.

Die nach obiger Art entstehenden Halbflächner werden pyritoëdrische genannt, im Gegensatz zu den oktaëdrischen. Die letzteren entstehen dadurch, dafs man ganze Oktanten abwechselnd stehen und wegfallen läfst. Bei den ersteren dagegen handelt es sich um 6, den Würfelflächen entsprechende Regionen, in deren jeder die Hälfte der Flächen stehen bleibt, während die andere Hälfte wegfällt. Auf einige dieser Formen kommen wir noch zurück.

§ 6.

Das regelmäfsige Ikosaëder.

Das regelmäfsige Ikosaëder (d. h. 20-Flach) ist derjenige Körper, bei dem in jeder Ecke fünf gleichseitige Dreiecke zusammenstofsen.

Digitized by Google

Aufgabe 42. Das regelmäfsige Ikosaëder nach der Aufklappmethode in Grundrifs und Aufrifs zu zeichnen.

Aufl. Man denke sich, wie in Figur 43, in der Grundrifsebene fünf gleichseitige Dreiecke um eine gemeinschaftliche Ecke M herum zu einem regelmäfsigen Stern angeordnet, und zwar so, dafs die eine Basis AB senkrecht steht. Jedes Dreieck klappe man auf, indem man es um eine Axe dreht, die durch M geht und zur Basis parallel ist. Die Ecken A und B legen dabei Kreise zurück, die in der Grundrifsprojektion als Gerade (AN und BL) erscheinen, die senkrecht gegen AB stehen. Entsprechendes geschieht bei den anderen Dreiecken. Das Aufklappen geschieht so weit, bis die Nachbarseiten zweier Dreiecke zusammenfallen, d. h. so weit, bis z. B. die Wege AN und KN sich in N treffen. Mit Hilfe eines Kreises um M, der durch N geht, sind leicht die fünf Dreiecke in der neuen Lage gezeichnet, sodafs $NLOPQ$ die Basis, M die Spitze einer regelmäfsigen fünfseitigen Pyramide ist.

Im Aufrifs hat man A_1 um M_1 so weit zu drehen, bis es als N_1 senkrecht über N liegt. In der Horizontalen durch N_1 sind die Orte der Punkte P_1 und Q_1 senkrecht über P resp. Q zu bestimmen. $P_1\,Q_1\,N_1\,L_1\,O_1$ mit Spitze M_1 ist die vorige Pyramide im Aufrifs.

Betrachtet man jetzt P_1 als Spitze einer neuen Pyramide, so hat man im Aufrifs von der fünfseitigen Basis derselben bereits die Punkte Q_1, O_1, M_1. Da diese in einer Geraden liegen, so erscheint die Ebene dieser Basis als Gerade. Eine solche Basis ist in $P_1 Q_1 N_1$ bereits in gleicher Lage gezeichnet worden, also mufs ganz von selbst $P_1 Q_1 = M_1 Q_1$ sein, und man hat $Q_1 R_1 = Q_1 N_1$ zu machen, um einen neuen Punkt R_1 zu finden.

Im Aufrifs hat man jetzt eine Pyramide mit der Spitze Q_1 zu vollenden, indem man durch R_1 und N_1 Parallele zu den Diagonalen $P_1 N_1$ und $M_1 R_1$ zieht, die sich in S_1 schneiden, wodurch das Fünfeck $P_1 M_1 N_1 S_1 R_1$ vollendet ist. (Dafs die Linien parallel werden müssen, ergiebt sich aus der Gestalt des regelmäfsigen Fünfecks.)

Das Fünfeck mit Spitze N_1 vollendet sich, indem man durch S_1 eine Parallele zu $Q_1 N_1$, durch N_1 eine solche zu $M_1 S_1$ legt. ($T_1 S_1$ ist also Fortsetzung von $R_1 S_1$.)

Zieht man endlich durch R_1 eine Parallele zu $Q_1 T_1$, durch T_1 eine solche zu $R_1 N_1$, so ist die Aufrifsfigur durch den Schnittpunkt U_1 im Wesentlichen vollendet.

Aus der leicht nachzuweisenden Kongruenz der Figuren $P_1 Q_1 N_1 M_1$ und $T_1 S_1 R_1 U_1$ im Aufrifs ergiebt sich, dafs durch das Herabproji-

Digitized by Google

zieren im Grundriſs ein regelmäſsiges Fünfeck entsteht, welches symmetrisch gegen das Fünfeck $NLOPQ$ liegt, so daſs stets Ecke des einen und Seite des anderen sich entsprechen.

Um die Figur 43 nicht undeutlich zu machen, ist der Grundriſs besonders in Figur 44 vollendet worden. Er erscheint also als ein regelmäſsiges Zehneck mit den in Figur 44 angegebenen Diagonalen.

Die Kenntnis dieses Umstandes erleichtert die Konstruktion, die hier nur deshalb umständlich erscheint, weil keine Kenntnisse vorausgesetzt wurden.

Bemerkung: In Figur 43 (Aufriſs) liegt U_1 senkrecht über M_1, Q_1S_1 ist eine Symmetrielinie, ebenso R_1N_1. Denkt man sich die Linie P_1M_1 horizontal, so erkennt man, daſs die Figur ein spezieller Fall von Figur 42 ist, woraus der oben bemerkte Zusammenhang mit einem gewissen symmetrischen Pentagon-Dodekaëder hervorgeht.

Die Existenz des Körpers, d. h. der Umstand, daſs ein Netz von 20 gleichseitigen Dreiecken einen geschlossenen Körper geben muſs, läſst sich durch ähnliche Betrachtungen nachweisen, wie bei dem regelmäſsigen Pentagon-Dodekaëder.

Aufgabe 43. Mit dem Ikosaëder sind die üblichen Grund- und Aufriſs-Drehungen vorzunehmen.

Aufgabe 44. Die Figur 43 soll in unsere Parallelperspektive umgesetzt werden.

Aufl. Die in Figur 45 durchgeführte Lösung geschieht genau ebenso, wie bei dem Pentagon-Dodekaëder, d. h. man zeichnet M_1, U_1, R_1T_1 und P_1N_1 genau so hin wie im Aufriſs der Figur 43, legt die Teilpunkte S_1 und Q_1 genau so, wie dort, an und vollendet die Fünfecke EFT_1GH und $ABCP_1D$ nach der bei Aufgabe 38 angegebenen Methode, worauf nur noch Verbindungslinien zu zeichnen sind.

[Bemerkung: Mineralogische Bedeutung hat das Ikosaëder nicht, wiederum aus gewissen Gründen der Irrationalität. Dagegen ist es in neuerer Zeit für tiefer gehende mathematische Untersuchungen, die auf dem Gebiete der Kugelteilung, der Funktionentheorie, der Abbildungstheorie und der Theorie der Gleichungen 5ten Grades liegen, von groſser Wichtigkeit geworden. Bezüglich der Kugelteilung denke man sich die umbeschriebene Kugel des Körpers und durch seine Kanten und den Mittelpunkt Ebenen gelegt, dann schneiden diese die Kugel in gröſsten Kreisen, welche ihre Oberfläche in 20 kongruente sphärische Dreiecke einteilen. Ähnliches kann man bei allen regelmäſsigen Körpern machen. Da das regelmäſsige Fünfeck bei

Digitized by Google

dem Ikosaëder eine wichtige Rolle spielt, so finden zwischen Ikosaëder und Pentagon-Dodekaëder interessante Beziehungen statt, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann. Nur folgendes sei erwähnt: Die Mittelpunkte der Flächen des Pentagon-Dodekaëders bilden ein Ikosaëder, die der Flächen des Ikosaëders bilden ein Pentagon-Dodekaëder. Bei den übrigen regelmäfsigen Körpern findet Entsprechendes statt.]

Rückblick: Stofsen in einer Ecke nur drei gleichseitige Dreiecke zusammen, so ist sie die Ecke des regelmäfsigen Tetraëders. Stofsen vier solche Dreiecke zusammen, so entsteht die Ecke des regelmäfsigen Oktaëders. Bei fünf zusammenstofsenden Dreiecken entsteht die Ecke des Ikosaëders. Sechs zusammenstofsende gleichseitige Dreiecke bilden keine Ecke, sondern sie liegen sämtlich in einer Ebene; sieben können nicht zusammenstofsen, da die Winkel um einen Punkt nicht mehr als 360° betragen können. Es giebt also auf Grundlage des Dreiecks nur die genannten drei regelmäfsigen Körper.

Bei drei zusammenstofsenden Quadraten erhält man die Ecke des Würfels. Vier dagegen legen sich schon flach in die Ebene, und mehr als vier können nicht zusammenstofsen. Es giebt also nur einen regelmäfsigen Körper mit Quadratseiten, den Würfel.

Bei drei zusammenstofsenden regelmäfsigen Fünfecken erhält man das regelmäfsige Pentagon-Dodekaëder. Dieses ist der einzige regelmäfsige Körper, der von Fünfecken begrenzt wird, denn mehr als drei Fünfecke würden für den gemeinschaftlichen Punkt einen Winkel von mehr als 360° geben.

Einen regelmäfsigen Körper, der von Sechsecken begrenzt wird, giebt es nicht, denn schon drei zusammenstofsende Sechsecke fallen, da jeder Winkel 120° beträgt, flach in die Ebene, zu einer Ecke sind aber mindestens 3 Flächen nötig. Aus regelmäfsigen Polygonen mit gröfserer Seitenzahl kann man erst recht keine Ecken bilden.

Es sind also im Ganzen nur 5 regelmäfsige Körper möglich, wenn man nicht die Kugel als regelmäfsiges Unendlichflach betrachten und mitzählen will.

Regelmäfsig im krystallographischen Sinne sind dagegen auch andere der betrachteten Körper. Sie gehören eben zum sogenannten regulären System, welches jedoch besser als das gleichgliedrige bezeichnet wird.

In den folgenden Abschnitten sollen noch einige Formen des gleichgliedrigen Systems nach einer andern Methode behandelt werden.

Digitized by Google

§ 7.

Das gleichgliedrige Trapezoëder.

In der Mineralogie wird das gleichgliedrige System folgendermafsen behandelt: Man denkt sich auf jeder der Axen des rechtwinkligen Axenkreuzes eine oder mehrere Entfernungen vom Mittelpunkte aus markiert, z. B. a, b, c. Darauf lege man durch die Endpunkte von dreien dieser Strecken eine Ebene. Vertauscht man nun die Strecken auf den Axen, so erhält man neue Ebenen. Sucht man die Schnitte derselben, so kann man, indem man alle Oktanten gleichmäfsig behandelt, einen geschlossenen Körper des gleichgliedrigen Systems konstruieren.

Ein Beispiel wird die Methode klar legen. Es sei der Körper gewählt, bei dem die Strecken a, $2a$, $2a$ abgetragen werden, und der als das Trapezoëder bezeichnet wird.

Aufgabe 45. Den Körper $a : 2a : 2a$, d. h. das gleichgliedrige Trapezoëder, in Parallelperspektive zu zeichnen.

Aufl. Die Punkte A, C, E, G, J, L in Figur 46 schneiden auf den Axen die Strecke a ab, die Punkte B, D, F, H, K, M die Strecke $2a$. In jedem Oktanten sind drei Flächen $a : 2a : 2a$ möglich, z. B. in dem oben, rechts und vorn liegenden Oktanten die Flächen AFH, EHB und GBF. Die beiden ersten schneiden sich in H und X, also ist HX die Durchschnittslinie, die beiden letzten in B und O, so dafs BO Durchschnittslinie ist, die letzte und erste in F und S, so dafs FS Schnittlinie ist. Die drei Schnittlinien dreier Ebenen sind entweder parallel, oder sie schneiden sich in einem Punkte, hier also giebt dies den Schnittpunkt N. Denkt man sich das aufserhalb des Körpers Liegende durch jene drei Ebenen weggeschnitten, so bleiben nur die Trapeze $AXNS$, $EONX$ und $GSNO$ in dem Oktanten stehen. In den übrigen Oktanten ist dasselbe durchgeführt. Die unsichtbaren Linien können punktiert eingetragen werden.

Bemerkung: Die allgemeinere Formel für das Trapezoëder ist $a : xa : xa$, wo x ein beliebiger Wert, nur gröfser als 1, ist.

Aufgabe 46. Das Trapezoëder $a : 2a : 2a$ in Grundrifs und Aufrifs zu zeichnen, zunächst in einfachster Lage, sodann durch Drehungen in allgemeinste Lage gebracht.

Bemerkung: Im Aufrifs rückt G nach der Mitte des Axenkreuzes, S senkrecht unter X u. s. w. (Warum?)

Digitized by Google

Aufgabe 47. Die allgemeinste Lage direkt auf axonometrischem Wege zu finden.

Aufgabe 48. Die Oktanten des Trapezoëders $a:2a:2a$ sollen abwechselnd stehen bleiben und wegfallen, so dafs sein oktaëdrischer Halbflächner entsteht.

Bemerkung: Die Auflösung geschieht wie früher in den entsprechenden Fällen. Es entsteht das schon bekannte Pyramiden-Tetraëder. — Einen pyritoëdrischen Halbflächner hat das Trapezoëder nicht, weil es Dreikantecken hat, die ein abwechselndes Stehenbleiben und Wegfallen unmöglich machen, denn dazu ist eine gerade Anzahl von Flächen nötig.

Bemerkung: Das Trapezoëder kommt in der Mineralogie ziemlich häufig vor. Gold, Silber, Salmiak, Granat, Analzim etc. krystallisieren häufig in dieser Form. Früher hielt man auch die Krystalle des Leucit für gleichgliedrige Trapezoëder und gab daher letzterer Gestalt den Namen Leucitoëder. Neuere Messungen zeigten jedoch, dafs der Leucit nicht dem gleichgliedrigen, sondern dem quadratischen Krystallsystem angehört. In der Umgebung des Vesuv findet man trapezoëdrische Krystalle ziemlich häufig.

Ebenso, wie man die Würfelkanten zuschärfen kann, kann man auch die Würfelecken zuspitzen. Letzteres geschieht stets durch die Flächen des Trapezoëders.

Aufgabe 49. Den Würfel in Parallelperspektive durch Trapezoëderflächen $a:2a;2a$ zuzuspitzen.

Bemerkung: In Figur 47 ist die Aufgabe an einer Würfelecke A durchgeführt. Zur Konstruktion reicht folgendes hin: Man mache $AE = AB = AG = 2AF = 2AH = 2AC$. Die Flächen BCE und BFG sind Trapezoëderflächen (Warum?), die sich in B und X schneiden, also BX als Durchschnittslinie haben. Die Flächen GBF und GEH treffen sich in G und Y, was den Schnitt GY giebt; die Flächen EBC und EHG in Z, was den Schnitt EZ giebt. Die drei Schnitte treffen sich in V; BVE, GVB und EVG sind die stehen bleibenden Zuspitzungsflächen. Die Konstruktion ist leicht über den ganzen Würfel auszudehnen.

Bemerkung: Auch durch das Pyramidenoktaëder und das in folgendem Abschnitt zu besprechende Diamantoëder können die Würfelkanten zugespitzt werden.

Digitized by Google

§ 8.

Das gleichgliedrige Hexakis-Oktaëder.

Das gleichgliedrige Hexakis-Oktaëder oder 6 mal 8-Flach hat die Formel $a : ma : na$, also z. B. $a : 2a : 3a$, d. h. es wird von sämtlichen Flächen gebildet, welche von den Axen die genannten Stücke abschneiden. Nennen wir die Axe eines beliebigen Oktanten x, y und z, so ergeben sich die 6 in ihm möglichen Flächen aus folgender Tabelle:

x,	y,	z
a :	$2a$:	$3a$
a :	$3a$:	$2a$
$2a$:	a :	$3a$
$2a$:	$3a$:	a
$3a$:	a :	$2a$
$3a$:	$2a$:	a.

Aufgabe 50. Das gleichgliedrige Hexakis-Oktaëder $a : 2a : 3a$ in Parallelperspektive zu zeichnen.

Aufl. Auf jeder Axenrichtung trage man die Strecken a, $2a$ und $3a$ ab und konstruiere die oben genannten Flächen. Die Schnittpunkte von je zweien suche man ebenso, wie bei dem Trapezoëder und bestimme durch sie die Schnittlinien. Dadurch erhält man den in Figur 48 gezeichneten Körper. Für einen Oktanten sind alle Hilfslinien mitgezeichnet.

Aufgabe 51. Die vorige Aufgabe in Grundrifs und Aufrifs zu lösen.

Aufgabe 52. Den Körper in allgemeiner Lage direkt axonometrisch zu zeichnen.

Aufgabe 53. Den tetraëdrischen Halbflächner des 48-Flachs zu zeichnen.

Aufl. Man läfst die ganzen Oktanten abwechselnd wegfallen und stehen, so dafs 24 Flächen bleiben.

Bemerkung: Der entsprechende Körper läfst sich als Pyramiden-Tetraëder mit gebrochenen Tetraëder-Kanten und Flächen betrachten. Die Mineralogie bezeichnet ihn als Borazitoëder, weil seine Flächen bisweilen am Borazit auftreten.

Aufgabe 54. Den pyritoëdrischen Halbflächner des 48-Flachs zu konstruieren.

Aufl. Man betrachtet den ursprünglichen Körper als Pyramidenwürfel mit gebrochenen Kanten und läfst in den Gebieten, die den

Digitized by Google

Würfelflächen entsprechen, die einzelnen Flächen abwechselnd stehen und wegfallen. Der entsprechende Körper heifst Diploëder. Man könnte ihn als Pentagon-Dodekaëder mit gebrochenen Flächen auffassen.

Bemerkung: Das gleichgliedrige 48-Flach ist der allgemeinste Körper des regulären Krystallsystems, denn aus der Formel $a : xa : ya$ lassen sich alle anderen durch Spezialisierung ableiten. Da der Diamant häufig in dieser Form krystallisiert, wird sie oft als Diamantoëder bezeichnet.

§ 9.

Formeltafel für das gleichgliedrige Krystallsystem.

1) Allgemeinste Form: $a : xa : ya$, giebt das 48-Flach oder Hexakis-Oktaëder oder Diamantoëder.

2) Eine Axe wird in unendlicher Entfernung getroffen:
$a : xa : \infty a$, giebt den Pyramidenwürfel oder das Tetrakis-Hexaëder.

3) Die gröfseren Axen sind gleich:
$a : xa : xa$, giebt das Trapezoëder.

4) Die beiden gleichen Axen sind unendlich-lang:
$a : \infty a : \infty a$, giebt den Würfel oder das Hexaëder.

5) Die kleineren Axen sind gleich:
$a : a : x a$, giebt das Pyramiden-Oktaëder oder Triakis-Oktaëder.

6) Die kleineren Axen sind gleich, die dritte unendlich lang:
$a : a : \infty a$, giebt das Rhomben-Dodekaëder.

7) Alle Axen sind gleich:
$a : a : a$, giebt das Oktaëder.

Die Halbflächner werden ebenso bezeichnet, nur wird $\frac{1}{2}$ vor die Formel gesetzt, und wenn es sich bei zweifelhaften Fällen um pyritoëdrische oder tetraëdrische Hemiëdrie handelt, noch der Buchstabe p, resp. t. Also:

1) Der pyritroëdrische Halbflächner des Diamantoëders:
$p\,\frac{1}{2}\,(a : xa : ya)$, das Diploëder.

2) Der tetraëdrische Halbflächner des Diamantoëders:
$t\,\frac{1}{2}\,(a : xa : ya)$, das Borazitoëder.

3) Der Halbflächner des Pyramidenwürfels:
$\frac{1}{2}\,(a : xa : \infty a)$, das Pentagon-Dodekaëder.

4) Der Halbflächner des Trapezoëders
$\frac{1}{2}\,(a : xa : xa)$, das Pyramidentetraëder.

Digitized by Google

5) Der Halbflächner des Pyramiden-Oktaëders:
$\frac{1}{2}(a:a:xa)$, das Deltoëder.
6) Der Halbflächner des Oktaëders:
$\frac{1}{2}(a:a:a)$, das Tetraëder.
(Würfel und Rhomben-Dodekaëder haben keine Halbflächner. Warum?)

§ 10.

Bemerkungen zur Verzeichnung schräg abgeschnittener Prismen und Pyramiden.

In Figur 49 ist ein schräg abgeschnittenes dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC und der Schnittfläche $A_1B_1C_1$ dargestellt. Die Verlängerungen der sich entsprechenden Ober- und Unterkanten schneiden sich in Punkten P, Q und R, die, wie leicht gezeigt werden kann, auf einer geraden Linie liegen. Die Durchschnittslinie der Flächen ABC und $A_1B_1C_1$ ist nämlich eine gerade Linie. Da nun B_1C_1 und BC als gerade Linien der Ebene BCC_1B_1 sich irgendwo (eventuell im Unendlichen) schneiden müssen, so kann dies, da sie gleichzeitig in $A_1B_1C_1$ resp. ABC liegen, nur in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen geschehen. Dort mufs also P liegen. Dasselbe gilt von Q und R.

Dasselbe gilt von der in Figur 50 dargestellten schräg abgeschnittenen dreiseitigen Pyramide, dasselbe von der jenseit der Spitze abgeschnittenen Pyramide in Figur 51.

(Jedesmal ist ABC die Grundfläche, $A_1B_1C_1$ die Schnittfläche.)

Nennt man also Dreiecke in der Ebene, bei denen die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel sind, oder durch einen Punkt gehen, perspektivische Dreiecke, so gilt der Satz:

Die entsprechenden Seiten perspektivischer Dreiecke sind entweder parallel, oder sie schneiden sich in drei Punkten, die auf gerader Linie liegen.

[Jede solche Zeichnung läfst sich nämlich als Projektionszeichnung eines Prismas resp. einer Pyramide mit schräger Schnittfläche betrachten.]

Handelt es sich um ein 4- oder mehrseitiges Prisma resp. Pyramide, so ist durch Annahme von drei Punkten auf den entsprechenden Kanten die schräge Schnittebene der Lage nach vollständig bestimmt. Die vierte Kante und die übrigen können also nicht mehr willkürlich abgeschnitten werden, sondern der Schnittpunkt ist bestimmt. Er ist nämlich so zu wählen, dafs die oben und unten sich

Digitized by Google

entsprechenden Kanten sich wiederum in der Schnittlinie der beiden Ebenen treffen.

Aufgabe 55. Es sei gegeben (Fig. 52) ein 4-seitiges Prisma, welches auf der Grundfläche $ABCD$ steht. Es werde geschnitten durch eine Ebene, die durch die willkürlich gewählten Punkte A_1, B_1, C_1 bestimmt ist. Wo liegt der Schnittpunkt D_1?

Aufl. AB und A_1B_1 geben den Schnittpunkt P, BC und B_1C_1 den Schnittpunkt Q, also ist PQ die Schnittlinie der Ebenen ABC und $A_1B_1C_1$. CD trifft diesen Schnitt in R, folglich mufs auch C_1D_1 durch R gehen. CR also giebt den Schnittpunkt D_1. (Auch AD und A_1D_1 müssen sich von selbst im Punkte S der Linie PQ treffen.)

Aufgabe 56. In gleicher Weise eine vierseitige Pyramide schräg abzustumpfen.

Bemerkung: In Figur 53 ist die Lösung entsprechend durchgeführt. Wird die Bemerkung über die Schnittlinie PQ bei solchen Zeichnungen nicht beachtet, so stellen diese eventuell ein Prisma (oder eine Pyramide) dar, welches nicht durch eine Ebene, sondern durch irgend eine krumme Fläche geschnitten ist, die durch die vier gezeichneten Geraden geht. Durch vier Punkte läfst sich nämlich nicht immer eine Ebene legen.

§ 11.

Beispiel einer Durchdringung.

Aufgabe 57. In Figur 54 sind zwei Prismen in Grundrifs und Aufrifs gegeben. Das eine, mit Grundfläche ABC, ist unregelmäfsig dreiseitig und steht senkrecht; das andere, mit Grundfläche $DFHK$, hat quadratischen Querschnitt und liegt horizontal und so, dafs seine Seitenflächen unter 45^0 geneigt sind. Die Schnittlinien beider Prismen sind zu konstruieren.

Aufl. Zunächst benenne man die schon vorhandenen Punkte in Grundrifs und Aufrifs, die sich gegenseitig entsprechen, gleichnamig, wie es in der Figur geschehen ist. DE im Grundrifs schneidet BC in X, senkrecht darüber mufs in DE im Aufrifs der Schnittpunkt X liegen. Ebenso ist es mit X_1 auf HJ unten und oben. In gleicher Weise übertrage man Y und T aus dem Grundrifs in den Aufrifs, wo nun die sichtbaren Schnittlinien XY und X_1Y und die unsichtbaren Schnittlinien XT und X_1T gezeichnet werden können.

Digitized by Google

Die Schnittpunkte U, W, V und W_1 sind ebenfalls leicht aus dem Grundrifs in den Aufrifs zu übertragen, und die Schnittlinien VW und VW_1 machen keine Schwierigkeit. Dagegen werden die von U nach W und W_1 gehenden Schnitte gebrochen erscheinen, da sie die senkrechte Kante passieren müssen. Wo wird nun die Kante AA_1 durch diese Linien getroffen? Von A im Grundrifs ziehe man eine Horizontale, welche KD in β trifft. Im Aufrifs ist nun rechts die Fläche $DKHF$ als $D_2K_2H_2F_2$ in der Seitenansicht gezeichnet. Durch D_2 lege man die Horizontale $D_2\beta_2 = D\beta$ und ziehe von β_2 aus die Senkrechte $\beta_2\gamma_2$ bis zur Linie D_2K_2. Die Horizontale durch γ_2 bis zum Schnitte mit der Kante AA_1 giebt den Punkt R. Nun ist RW und ebenso RU, beides punktiert, zu ziehen. (Die Konstruktion hätte sich abkürzen lassen, da das eine Prisma ein quadratisches ist. Der angegebene Weg läfst sich aber allgemein anwenden.) Bei H_2 wäre es ebenso zu machen, wenn nicht bei dem vorliegenden Falle R_1 ebenso hoch über HJ liegen müfste, wie R unter DE, so dafs die besondere Konstruktion überflüssig ist.

Aufgabe 58. Mit der Figur 54 sollen verschiedene Drehungen vorgenommen werden, damit die schwierigeren Stellen in allgemeinerer Lage sichtbar werden.

Bemerkung: Der Schüler übe sich noch im Durchdringen von anderen Prismen, von Prismen und Pyramiden, von Pyramiden und Pyramiden, von Prismen und einigen der behandelten regelmäfsigen Körper oder gleichgliedrigen Krystallformen und wähle dabei auch besonders schwierige Lagen. Die Konstruktionen lassen sich stets nach der bei obigem Beispiele angemeldeten Methode mit einigem Nachdenken auffinden.

Kapitel II.

Gebilde mit krummen Flächen in Parallel-Projektionen.

§ 12.

Schräge Kreisprojektionen.

Der Kreis ist zwar ein ebenes Gebilde, er tritt aber an vielen wichtigen krummen Flächen auf, so dafs zunächst von ihm die Rede sein mufs.

Aufgabe 59. Einen horizontal liegenden Kreis in Parallelperspektive (mit 30^0 und $\frac{1}{3}$ Verkürzung) zu zeichnen.

Digitized by Google

Aufl. Es handelt sich um den dem Quadrate $CEFD$ in Figur 55 einbeschriebenen Kreis. $C_1E_1F_1D_1$ ist die in verlangter Perspektive gegebene Zeichnung dieses Quadrates, AB die unverändert bleibende Mittellinie. Von letzterer aus denke man sich die Vertikalen JK, MG, LP, NO bis zur Kreisperipherie gezeichnet, durch die oberen Punkte dieser Vertikalen Parallele zu BC_1, durch die unteren Parallele zu CC_1 gezogen. Die neuen Linien durch J und K geben den Schnittpunkt K_1, die durch M und G geben G_1, die durch L und P geben P_1, die durch N und O geben O_1 u. s. w. Die so gefundenen Punkte liegen sämtlich auf der den Kreis darstellenden Kurve, die man als Ellipse bezeichnet. Die Punkte K_2, G_2, P_2 und O_2 findet man durch Verlängerung der schrägen Linien um sich selbst, oder auch dadurch, dafs man den oberen Teil des gegebenen Kreises zu einer analogen Konstruktion benutzt. Ähnlich kann man beliebig viele Punkte konstruieren.

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion liegt darin, dafs die Dreiecke KK_1J, GG_1M u. s. w. dem Dreiecke CC_1B ähnlich und ähnlich liegend sind. Wie also $C_1B = \frac{1}{3}CB$, so ist auch $K_1J = \frac{1}{3}KJ$ u. s. w. Auch die Neigung ist überall die richtige.

Bemerkung: Diese Konstruktion empfiehlt sich für das Reifsbrett dadurch, dafs die Parallelen durch Verschiebung des Winkel-Lineals auf der Reifsschiene bequem zu konstruieren sind.

Einem Parallelogramm lassen sich unendlich viele Ellipsen einbeschreiben. Hier ist in das Parallelogramm $C_1D_1F_1E_1$ diejenige eingezeichnet, die in den Halbierungspunkten der Seiten berührt. Man achte darauf, dafs ihre grofse Axe nicht horizontal, sondern etwas geneigt liegt. Nur die gezeichnete Ellipse hat die Eigenschaft, dafs die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Berührungspunkte solche Durchmesser sind, deren Richtung den Parallelogrammseiten parallel ist. So zusammengehörende Durchmesser der Ellipse heifsen konjugierte Durchmesser. Jeder der beiden halbiert die zu dem andern parallelen Sehnen und ist der Tangente in den Endpunkten des andern parallel. Da der Kreis unendlich viele umbeschriebene Quadrate hat, deren Mittellinien die Berührungspunkte treffen, so folgt aus der Projektionszeichnung, dafs die Ellipse unendlich viele umbeschriebene Parallelogramme gleichen Inhalts besitzt, bei denen dasselbe stattfindet. (Es giebt andere umbeschriebene Parallelogramme, bei denen dies nicht der Fall ist.) Es existieren also auch unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser. Man findet zu einem Durchmesser den konjugierten, indem man ihn und eine ihm parallele

Digitized by Google

Sehne halbiert und die Teilpunkte verbindet. Den Mittelpunkt einer Ellipse findet man durch Halbierung zweier paralleler Sehnen, wodurch man den leicht zu halbierenden Durchmesser findet. Die Tangente in einem Ellipsenpunkte kann man konstruieren, indem man durch ihn einen Durchmesser legt, den konjugierten konstruiert und durch den gegebenen Punkt eine Parallele zum letzteren legt. — Bei obiger Projektionszeichnung verwandeln sich beliebige Durchmesser des Kreises, die aufeinander senkrecht stehen, stets in konjugierte Durchmesser der Ellipse. Warum?

Nur ein Paar konjugierter Durchmesser stehen aufeinander senkrecht. Diese heifsen die grofse und die kleine Axe. In Figur 8 und 9 sind sie leicht zu erkennen, auch läfst sich das umbeschriebene Haupt-Rechteck leicht zeichnen.

Aufgabe 60. Einem gegebenen Parallelogramm diejenige Ellipse einzuzeichnen, welche in den Mittelpunkten der Seiten berührt.

Aufl. Geschieht wie vorher mit Hilfe von Quadrat und Kreis. Das Quadrat braucht aber nicht so gelegt zu werden, dafs jede seiner Hälften die Mittellinie des Parallelogramms zur Basis hat, sondern man kann es auch so zeichnen, dafs es über der einen Parallelogrammseite errichtet wird. Vgl. Figur 56.

Aufgabe 61. Einem gegebenen Rechteck die Ellipse einzuzeichnen, welche in den Halbierungspunkten der Seiten berührt.

Aufl. Die vorige Parallelen-Konstruktion ist hier unbrauchbar. Man konstruiere den Hilfskreis wie bei Figur 8 oder 9 und verkürze oder verlängere die zu den Rechtecksseiten parallelen Sehnen in der Weise, wie diese Figuren es angeben, jedoch dem Verhältnis der Rechtecksseiten entsprechend.

Aufgabe 62. Die Hauptaxen einer gegebenen Ellipse zu finden.

Aufl. Man suche nach vorher angegebener Methode den Mittelpunkt und schlage um diesen einen Kreis, der die Ellipse in 4 Punkten schneidet. Die Seiten des so bestimmten Rechtecks sind den gesuchten Axen parallel.

Bemerkung: Bei dieser Konstruktion wird vorausgesetzt, dafs jede durch obige Schrägprojektion gefundene Ellipse zwei Symmetrieaxen hat. Dafs dies der Fall ist, erkennt man folgendermafsen:

In Figur 56 sind Quadrat und Kreis in ähnlicher Weise, wie vorher, in Parallelogramm und Ellipse verwandelt. (Die sich ent-

Digitized by Google

sprechenden Punkte beider Figuren findet man durch Senkrechte, Parallele zu DE und Parallele zu E_1E. So findet man z. B. den M_1 entsprechenden Punkt durch die Vertikale M_1L_1, durch $LN \parallel DE$ und durch $M_1M \parallel E_1E$.) Alle aufeinander senkrechten Durchmesserpaare des Kreises geben konjugierte Durchmesser der Ellipse. Es fragt sich, ob eins der letzteren Paare einen rechten Winkel bildet. Um dies zu erkennen, errichte man im Halbierungspunkte G von MM_1 auf dieser Linie ein Lot, welches die Parallelogrammseite CD in H trifft, und schlage mit HM um H einen Kreis, der durch M_1 gehen mufs und dieselbe Parallelogrammseite in J und K schneidet. Zieht man nun KM, MJ, KM_1 und M_1J, so erkennt man, dafs der Winkel KMJ die Projektionszeichnung von KM_1J ist. Beide aber sind Rechte, als Winkel im Halbkreise. MJ und MK sind aber nach Obigem auch die Richtungen konjugierter Durchmesser, also, da sie aufeinander senkrecht stehen, die Richtungen der Hauptaxen. Die Symmetrie der Ellipse gegen beide ergiebt sich eben daraus, dafs die zu jeder der beiden Axen senkrechten Sehnen halbiert sind, was von allen konjugierten Richtungen gilt.

Schneidet übrigens JM_1 den Kreis in Y_1 und V_1, so giebt $Y_1Y \parallel E_1E$ den Endpunkt Y der kleinen Axe. $MV = MY$ giebt den andern Endpunkt, ebenso $V_1V \parallel E_1E$. Schneidet ferner KM_1 den Kreis in X_1 und Z_1, so geben X_1X und Z_1Z parallel zu EE_1 gezogen die Endpunkte X und Z der gröfseren Axe. Auch hier findet sich Z einfacher durch $MZ = MX$.

So ergiebt sich die Lösung folgender wichtigen Aufgabe:

Aufgabe 63. Von einer nicht gezeichneten Ellipse sind zwei konjugierte Durchmesser nach Gröfse und Richtung gegeben; die beiden Hauptaxen sollen konstruiert werden.

Aufl. In Fig. 57 seien AB und LN die beiden sich gegenseitig in M halbierenden konjugierten Durchmesser. Man lege durch L eine Parallele PQ zu AB, errichte auf dieser in L das Lot $LM_1 = MA$, verbinde M mit M_1 und errichte im Halbierungspunkte G von MM_1 das Lot GH, wo H der Schnitt desselben mit PQ ist. Mit HM schlage man um H einen Kreisbogen, der PQ in J und K schneidet, dann ist KM die Richtung der einen Axe, JM die der andern. Macht man endlich M_1X_1 auf M_1K gleich M_1L, ebenso M_1Y_1 auf M_1J gleich M_1L, und legt man durch die Teilpunkte X_1 und Y_1 Parallele zu MM_1, so erhält man die Endpunkte X und Y der gesuchten Halbaxen.

Bemerkung: Es giebt noch andere Konstruktionen zur

Digitized by Google

Auffindung der Hauptaxen, jedoch beanspruchen dieselben Vorkenntnisse.

Aufgabe 64. Die Ellipse mechanisch mit Hilfe eines Fadens zu konstruieren.

Aufl. Man denke sich, wie in Figur 58, in zwei Punkten P und Q Stifte eingeschlagen, um diese einen geschlossenen Faden gelegt und letzteren mit der Bleifeder (R) straff gespannt. Geht man mit dem anspannenden Stifte rings herum, so erhält man die Ellipse.

Bemerkung: Der Beweis für die Richtigkeit dieser Fadenkonstruktion ergiebt sich aus folgender stereometrischen Betrachtung.

In Figur 59 ist ein gerader Kreiscylinder (vorläufig nicht ganz korrekt) dargestellt, der durch eine Ebene schräg durchschnitten ist. Die Schnittkurve läfst sich als eine schräge Parallelprojektion der Kreise CAD und EBF betrachten, sie ist also eine Ellipse. Jetzt denke man sich von oben und unten Kugeln in den Cylinder geschoben, die genau in ihn passen. Berühren dieselben die Schnittebenen in den Punkten P und Q, so verbinde man diese Punkte mit einem beliebigen Punkte X der Schnittkurve. Durch X aber lege man auf der Cylinderfläche die einzige mögliche Gerade AB von dem Berührungskreise CAD der einen Kugel bis zum Berührungskreise EBF der anderen. Offenbar sind XP und XA Tangenten an die obere Kugel, also einander gleich. Dasselbe gilt von XQ und XB in bezug auf die untere Kugel. Also ist

$$PX + QX = AX + XB = AB.$$

Die beiden Berührungskreise CD und EF haben aber überall den Abstand AB, bewegt sich also X auf der Schnittkurve, so bleibt stets $PX + QX = AB$. Die Ellipse hat also die Eigenschaft, dafs die Summe zweier gewisser Strahlen eine unveränderliche Gröfse ist. Daraus ergiebt sich die Richtigkeit der Faden-Konstruktion.

Man nennt die Punkte P und Q Brennpunkte der Ellipse, die von beiden ausgehenden Strahlen aber Brennstrahlen. Der Satz läfst sich also folgendermafsen aussprechen: Die Summe der Brennstrahlen einer Ellipse ist für ihre sämtlichen Punkte eine konstante Gröfse.

Aus Figur 60 ergiebt sich leicht, dafs diese konstante Summe gleich der grofsen Axe ist. Es ist nämlich, wenn F und F_1 die Brennpunkte sind, für die Lage A des Stiftes

$$FA + F_1A = FA + (F_1F + FA) = FA + F_1F + BF_1 = BA.$$

Digitized by Google

Bemerkung: Die Fadenkonstruktion entspricht folgender geometrischen: Man schlage um F einen Kreis mit der konstanten Summe und ziehe einen beliebigen Radius FX und dazu die Gerade F_1X. Den Winkel bei X trage man in F_1 an F_1X so an, dafs XF_1P ein gleichschenkliges Dreieck wird. Dann ist P ein Punkt der Ellipse. Solche Punkte kann man beliebig viele konstruieren. (Das Lot QP wird Tangente.)

Aufgabe 64b. Die Figur 59 soll in Grundrifs und Aufrifs korrekt gezeichnet und durch Drehung in allgemeine Lage gebracht werden. (Man beginne mit der Lage, in der die Schnittebene als gerade Linie erscheint.)

Aufgabe 65. Die Brennpunkte einer Ellipse zu finden.

Aufl. Man suche zunächst ihre Axen AB und CD (Figur 60) und schlage sodann mit MA um D einen Kreis, der in F und F_1 schneidet. Dies sind die Brennpunkte.

Bew. $FD + F_1D = 2 \cdot AM = AB =$ der konstanten Summe.

Bemerkung: Es könnte eingewendet werden, dafs in Figur 59 nur von solchen Ellipsen die Rede ist, die durch Verlängerung gewisser Kreislote entstehen. Es läfst sich aber leicht zeigen, dafs die durch Verlängerung der Lote des einbeschriebenen Kreises entstehende Ellipse gleichzeitig eine solche ist, die durch Verkürzung der entsprechenden Lote des umbeschriebenen Kreises entsteht. In Figur 61 sind beide Kreise gezeichnet, und zwar in 4 Quadranten geteilt. Zieht man MA beliebig, legt man durch den Schnittpunkt B die Linie FC parallel zu dem einen Durchmesser, durch A die Linie AD parallel zum andern, so ist der Schnittpunkt C ein Punkt der Ellipse, für die der kleinere Kreis der einbeschriebene, der gröfsere der umbeschriebene ist.

Es ist nämlich $FB : FC = MB : MA$, d. h. der Ellipsenpunkt C entsteht durch Verlängerung der Lote FB im Verhältnis der Radien. Gleichzeitig ist aber $DA : DC = MA : MB$, also entsteht der Punkt zugleich durch Verkürzung der Lote DA im Verhältnis der Radien.

Alle diese geometrischen Bemerkungen verschaffen dem Zeichner manche Vereinfachung und Erleichterung.

Setzt man (Figur 60)

$$MF_1 = MF = e, \quad MA = MB = a, \quad MD = MC = b,$$

so ist, da auch $DF = DF_1 = a$ ist, $a^2 - b^2 = e^2$. Die grofse Axe ist $2a$, die kleine Axe $2b$, die „Brennweite“ ist $2e$. Man bezeichnet e auch als lineare Exzentrizität.

Digitized by Google

Aufgabe 66. Die Aufgabe 59 soll wiederholt werden, jedoch sollen nicht Punkte der Ellipse, sondern Tangenten konstruiert werden.

Aufl. In Figur 62 ist das Nötige aus Figur 55 wiederholt, also CC_1 die Projektionsrichtung. Ist nun AB eine Tangente des Kreises, so ergiebt sich A_1 bezw. B_1 durch Parallele zu CC_1, die durch A und B gelegt werden. A_1B_1 ist sodann die gesuchte Ellipsentangente.

Bemerkung: Konstruiert man auf diese Weise sehr viele aufeinander folgende Tangenten, so wird die Ellipse förmlich ausschattiert.

Aufgabe 67. Ein Kreis stehe vertikal und seine Ebene sei senkrecht zur Bildfläche. Er soll in Parallelperspektive gezeichnet werden.

Aufl. Dreht man Figur 55 um 90°, so hat man die Konstruktion für eine gewisse Parallel-Perspektive. Für die bei uns gebräuchliche sind nur leicht zu übersehende Änderungen zu machen.

Aufgabe 68. Einen Würfel in Parallelperspektive zu zeichnen, dessen Seitenflächen Kreise einbeschrieben sind.

Aufl. nach dem Früheren leicht. (Figur 63.)

Aufgabe 69. Drei sich senkrecht schneidende Kreise gleicher Gröfse und gemeinschaftlichen Mittelpunktes in Parallel-Perspektive zu zeichnen.

Aufl. mit Hilfe umbeschriebener Parallelogramme leicht. In Figur 64 ist das Resultat dargestellt. Man achte darauf, dafs die Kreise an gewissen Stellen übereinander greifen. Es ist die Lage des Axenkreuzes gewählt, bei der zwei Axen in der Bildfläche liegen.

Aufgabe 70. Einen stehenden Ring mit quadratischem Querschnitt zu zeichnen, dessen Axe der Bildfäche parallel ist.

Aufl. In Figur 65 sind zunächst die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, denen die Kreise (Ellipsen) so einzuschreiben sind, dafs sie in J, K, L, M resp. in N, O, P, Q berühren. Aus möglichst vielen Punkten beider Ellipsen ziehe man endlich horizontale Gerade von der Länge PL, z. B. XY und RL. Durch die Endpunkte derselben sind beliebig viele Punkte der noch fehlenden Ellipsen bestimmt, die nur Verschiebungen der früheren sind. Man achte darauf, dafs die Seite LR des oberen Quadrates $PLRS$ nicht mit der obersten Tangente XY zusammenfällt. Unten findet ähnliches statt. Die Punkte E, F, G und H brauchen nicht auf der gröfseren Ellipse zu liegen.

Digitized by Google

Aufgabe 71. Derselbe Ring soll in horizontaler Lage gezeichnet werden.

Aufl. leicht. Schon die Drehung der Figur 65 um 90^0 giebt die Zeichnung für eine gewisse Parallelperspektive, die jedoch nicht die bei uns gebräuchliche ist.

Aufgabe 72. Einen Ring derselben Art zu zeichnen, dessen Axe senkrecht zur Ebene der Tafel steht.

Aufl. Die Konstruktion ergiebt sich von selbst aus Figur 66. Es handelt sich um Kreise um die Punkte M und M_1 ($MM_1 = \frac{1}{3}PQ$ und um 30^0 geneigt). AB und CD sind gemeinschaftliche Tangenten der gröfseren Kreise, die von selbst die Länge MM_1 erhalten.

Aufgabe 73. Der Ring der Aufgabe 72 und der in Aufgabe 70 behandelte, beide gleich grofs gedacht, sollen so gezeichnet werden, dafs der erstere im letzteren hängt.

Bemerkung: Die Aufgabe ist in ihren einzelnen Teilen bereits gelöst. Trotzdem sind einige Schwierigkeiten vorhanden. In Figur 67 ist zunächst darauf zu achten, dafs X, der Halbierungspunkt der Seite KL des Quadrates $KLPR$ (nicht etwa der obersten Horizontalen), senkrecht über Y, dem Halbierungspunkte der die Kreiszentra M und M_1 verbindenden Linie, liegen mufs.

In der Nebenfigur 68 ist von vorn gesehen dargestellt, was an der einen Seitenfläche des oberen Ringes geschieht. Die Punkte F, E und J der Figur 68 sind senkrecht unter P (nicht aber unter X) in Figur 67 einzutragen, wodurch sich A und B in letzterer leicht bestimmen. Erst wenn E in Figur 67 gefunden ist, findet man durch Schlagen des Kreises um E mit dem Radius des Innenkreises den senkrecht unter X liegenden Punkt Y und daraus die Punkte M und M_1.

[Die Aufgabe enthält für den Anfänger so viel Lehrreiches, dafs geraten wird, sie nicht zu überschlagen.]

Es liefsen sich am Schlusse dieses Paragraphen noch viele mathematische Andeutungen geben. Nur eine sei erwähnt: Jede Parallelprojektion einer Ellipse giebt wieder eine Ellipse. Warum?

§ 13.

Orthogonal-Projektionen des Kreises.

Aufgabe 74. Der im Grundrifs geradlinig, im Aufrifs kreisförmig erscheinende Kreis soll durch abwechselnde Drehungen in verschiedene Lagen gebracht werden.

Digitized by Google

Aufl. In Figur 69 ist durch Herabprojizieren beliebiger Kreispunkte zunächst gezeigt worden, was im Grund- und Aufrifs zusammengehört. Darauf ist der Grundrifs gedreht und die markierten Punkte sind nach oben projiziert, während die ursprünglichen Aufrifspunkte horizontal verschoben sind. Die Schnittpunkte der zusammengehörigen Projektionslinien geben Punkte für den neuen Aufrifs, der nach dem Früheren eine Ellipse sein mufs. Der neue Aufrifs ist sodann einer Drehung unterworfen worden. Die Punkte sind vertikal herabprojiziert, die des zweiten Grundrisses horizontal verschoben worden. Die neu entstehende Grundrifsfigur ist wiederum eine Ellipse.

Bemerkung: Es wäre nur nötig gewesen, das umbeschriebene Quadrat den verschiedenen Drehungen zu unterwerfen. Dem Schlufsparallelogramm bliebe dann eine Ellipse einzuzeichnen, die in den Halbierungspunkten der Seiten berührt.

Aufgabe 75. Den in Figur 70 in Grund- und Aufrifs dargestellten Kreisring durch abwechselnde Drehungen in verschiedene Lagen zu bringen.

Aufl. leicht.

Aufgabe 76. Zwei gleichgrofse Ringe quadratischen Querschnitts durchkreuzen sich rechtwinklig so, dafs der eine im anderen hängt. Die Figur ist in Grund- und Aufrifs zu zeichnen und einer Drehung (des Grundrisses) zu unterwerfen.

Bemerkung: Auch bei dieser Aufgabe giebt es, wie bei Aufgabe 73, einen naheliegenden Fehler. Man könnte meinen, die Linie AB in Figur 71 wäre als Quadratseite in Fig. 72 einzuzeichnen. AB ist aber die Berührungssehne an der Aufsenfläche des Ringes, nicht in der Mittelschicht desselben, bis zu welcher noch ein Aufsteigen stattfindet. Die Höhe dieses Aufsteigens ergiebt sich aus der Nebenfigur, wo A_1A_2 die Breite für den Aufsteigbogen bedeutet, während M_1 dadurch gefunden wird, dafs man mit dem Radius des Innenringes um A_2 oder A_1 einen Bogen schlägt. Mit Beachtung dieser Vorsichtsmafsregeln ist Figur 72 entstanden, die nun der Drehung zu unterwerfen ist und der Figur 67 verwandt wird.

Aufgabe 77. Das in Figur 73 dargestellte Rad soll in Grund- und Aufrifs mehreren Drehungen unterworfen werden.

Digitized by Google

§ 14.

Gerader Kreis-Cylinder und Schraubenlinien desselben.

Aufgabe 78. Der in Figur 74 dargestellte Cylinder soll durch Drehungen in verschiedene Lagen gebracht werden.

Bemerkung: Die Aufgabe ist bereits bei den Kreisringen gelöst.

Aufgabe 79. Der Mantel des Cylinders soll durch gerade Linien und Kreisschnitte in ein System von Quadraten eingeteilt werden, welches in Grund- und Aufriſs zu zeichnen ist.

Aufl. In Figur 75 ist zunächst der Grundriſs regelmäſsig eingeteilt worden, beispielsbalber in 16 Teile. Durch Heraufprojizieren der Teilpunkte in den Aufriſs erhält man die Vertikalen, welche die Cylinderfläche in kongruente Streifen einteilen. Zieht man oben Parallele zu AB in gleichen Abständen, so erhält man die Einteilung des Mantels in kongruente Rechtecke. Sollen dieselben Quadrate sein, so müſste in diesem Falle, wenn man $AB = 1$ setzt, $\frac{\pi}{16}$ oder $\frac{3{,}14159265\ldots}{16}$ als Abstand der Parallelen gewählt werden. Da jedoch eine exakte Konstruktion der Gröſse π unmöglich ist, so läſst die anscheinend so einfache Aufgabe nur eine angenäherte Lösung zu.

Bemerkung: In Figur 76 und 77 ist gezeigt, wie man die Diagonalen eines Quadratnetzes oder Rechtecksnetzes auf verschiedene Weise benutzen kann, um neue Quadratnetze oder Rechtecksnetze zu erhalten. Die Diagonallinien haben dabei die Eigenschaft, jede der ursprünglichen Parallelenscharen unter konstantem Winkel zu schneiden. Hat man also eine krumme Fläche exakt oder angenähert in ein solches Netz eingeteilt, so kann man auch dort die Diagonalkurven (in der Mathematik „isogonale Trajektorien“ genannt, auf der Kugel in einem Falle als „Loxodromen“ bezeichnet) konstruieren. Bei dem Cylinder erhält man so die „Schraubenlinien“.

Aufgabe 80. Eine Kreiscylinderfläche durch zwei Scharen von Schraubenlinien in ein Quadratnetz einzuteilen.

Bemerkung: In Figur 78 ist unter Benutzung der letzten Quadratteilung die Aufgabe durchgeführt. Dabei sind, wie in Figur 77, die Diagonalen von Doppel-Quadraten gewählt worden. Jede Schraubenlinie schmiegt sich rechts und links der Grenzlinie (AB und CD) an, stöſst also nicht etwa unter spitzem Winkel auf dieselbe.

Solche Parallelscharen von Schraubenlinien kommen bei der Verzeichnung von Schraubengewinden vor.

Digitized by Google

Aufgabe 81. Ein quadratisches Schraubengewinde zu zeichnen.

Aufl. In Figur 79 ist gezeigt, dafs es sich um zwei Cylinder mit den Grenzlinien PQ und RS resp. VX und WY handelt. $AA_1A_2A_3$ ist die „erzeugende" Quadratfläche des Gewindes. Ist AD die Ganghöhe, d. h. die Höhe eines Umgangs, so hat B die mittlere Höhe. Die Schraubenlinie des äufsern Cylinders wird nicht so steil, wie die des inneren, da beide gleiche Ganghöhe haben, die äufsere aber einen gröfseren Weg macht. In der Mittellinie KL finden die Durchkreuzungen statt. Dort erkennt man den Unterschied beider Steigungen, denn nur an diesen Stellen stimmt die wirkliche Neigung mit der gezeichneten überein. Die Konstruktionen selbst geschehen, wie vorher, mit Hilfe einer Rechtecksteilung oder mit alleiniger Hilfe des Grundrifskreises.

Aufgabe 82. Ein scharfes Schraubengewinde zu zeichnen.

Bemerkung: Es handelt sich um Gewinde, deren erzeugende Fläche ein gleichschenkliges Dreieck XYZ ist. In Figur 80 ist ein scharfes Gewinde dargestellt, bei dem der Winkel an der Spitze des Dreiecks gleich 30^0 ist. Im Wesentlichen geschieht die Konstruktion wie vorher. Bei AB, CD, EF, GH und JK u. s. w. ist zu beachten, dafs an beide Kurvenbogen als Grenzlinie die gemeinschaftliche Tangente zu legen ist.

Aufgabe 83. Ein Schraubengewinde zu zeichnen, dessen Profil ein Trapez ist.

Aufgabe 84. Das Resultat der Aufgaben 79 bis 83 soll durch Drehung in verschiedene Lagen gebracht werden.

Aufgabe 85. Die Aufgaben dieses Abschnitts in schräger Parallelperspektive zu wiederholen.

Bemerkung: Das Wesentliche ist geschehen, sobald man den Grundrifskreis perspektivisch gezeichnet hat. Dies macht aber keine Schwierigkeit, da man jeden Kreispunkt, also auch die regelmäfsigen Teilpunkte, in die Perspektive übertragen kann.

Aufgabe 86. Der schräg abgeschnittene Cylinder der Figur 81 soll durch Drehung in verschiedene Lagen gebracht werden.

Wie kann man die wirkliche Gestalt der Schnittfläche direkt zeichnen?

Bemerkung: Die Lösung ist in Figur 81 durchgeführt und erläutert sich selbst. AB wird grofse Axe, CD kleine Axe der wirklichen Ellipse.

Digitized by Google

Aufgabe 87. Dieselbe Aufgabe in schräger Parallelperspektive.

Aufgabe 88. Die Durchdringungskurve für den Halb-Cylinder und das Prisma der Figur 82 zu konstruieren.

Aufl. Das oben und unten zusammengehörige ist durch gleiche Buchstaben bezeichnet. Dadurch ergeben sich oben von selbst die Endpunkte P, Q, X und O für die Linien JQ, GP, LX und EO. Ebenso ist es rechts. Um noch andere Punkte der Schnittkurve zu finden, ziehe man z. B. die Linie UV im Grundrifs und die zugehörige oben (ähnlich wie in der Aufgabe 57 mittels $J_1U_1 = JU$ im Grundrifs), so dafs sich der Punkt V im Aufrifs leicht ergiebt. So kann man beliebig viele Punkte der Kurvenzüge $PQXO$ und $RSTY$ zeichnen. Die Kurven sind übrigens Ellipsenbogen.

Aufgabe 89. Dieselbe Aufgabe in Parallelperspektive.

Aufgabe 90. Dieselben Aufgaben für ein schräg durch den Cylinder gestecktes Prisma.

Aufgabe 91. Dieselben Aufgaben für zwei sich durchdringende Cylinder gleichen oder verschiedenen Durchmessers.

§ 15.

Der gerade Kreiskegel und seine Mantelfläche mit Rechteckteilung und den Linien konstanter Steigung.

Aufgabe 92. Den in Figur 83 dargestellten Kegel durch abwechselnde Drehungen in allgemeiner Lage zu zeichnen und zugleich seinen Mantel durch Gerade in gleiche Teile einzuteilen.

Aufl. Die Teilung des Grundrifskreises ist eine regelmäfsige. Die Zeichnung nimmt 16 Teile an. Durch Hinaufprojizieren in den Aufrifs erhält man dort die Teilungslinien. Die abwechselnden Drehungen erfolgen nach gebräuchlicher Methode. In der Figur ist nur eine solche durchgeführt.

Aufgabe 93. Den Mantel des in Figur 84 dargestellten Kegels durch Gerade und Kreisschnitte in ein System ähnlicher rechtwinkliger Flächenstücke einzuteilen*).

Aufl. In Figur 84 ist zunächst der Grundrifs durch Radien in 16 gleiche Teile eingeteilt, worauf die Teilung in den Aufrifs

*) Die Einteilung in „quadratische" Flächenräume erfordert die Kenntnis der Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$, der Basis der natürlichen Logarithmen.

Digitized by Google

übertragen ist, wie in Aufgabe 92. Sodann ist im Aufriſs willkürlich der Horizontalschnitt CD geführt und die Diagonale EF gezogen. Zu dieser ist durch G eine Parallele gezogen, die den Schnittpunkt H giebt, durch den der Horizontalschnitt JK zu legen ist. In ähnlicher Weise fährt man nach oben hin fort. Durch Herabprojektion der Punkte C und D in den Grundriſs findet man die Durchmesser der unten zu zeichnenden Kreise.

Bemerkung: Im Grundriſs sind alle Flächenteile geometrisch ähnlich, im Aufriſs nur die in jedem Dreiecks-Streifen liegenden.

Aufgabe 94. Mit der letzten Figur sind die wechselnden Drehungen zur allgemeinen Lage vorzunehmen.

Aufgabe 95. Mit Hilfe der vorigen „Rechtecksteilung“ sollen Diagonalkurven auf dem Kegelmantel gezeichnet werden, die ihn nach Art der Schraubenlinien gleichfalls in gleichwinklige Flächenstücke zerlegen. In gewissen Fällen ergiebt sich die Rechtecksteilung.

Aufgabe 95b. Die Aufgabe 92 in schräger Parallelperspektive zu wiederholen.

§ 16.

Die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels.

Aufgabe 96. Der Kegel in Figur 85 werde durch die Ebene AE so geschnitten, daſs nur seine untere Hälfte, nicht aber die Verlängerung über die Spitze hinaus, getroffen wird. Die Gestalt der Schnittfläche im Grundriſs soll gezeichnet und auch ihre wirkliche Gestalt konstruiert werden.

Aufl. Zieht man im Aufriſs BY in beliebiger Richtung und projiziert man Y vertikal in den Grundriſs nach Y_1 und Y_2, so sind B_1Y_1 und B_1Y_2 die Grundriſslinien, welche BY entsprechen. Letzteres schneidet AE in W. Projiziert man dieses vertikal in den Grundriſs nach W_1 und W_2 (auf B_1Y_1 und B_1Y_2) so sind dies Punkte der Schnittfläche im Grundriſs. Ebenso giebt BX, welches DE in V schneidet, die Punkte V_1 und V_2 auf B_1X_1 und B_1X_2, und ebenso kann man beliebig viele andere Punkte konstruieren.

Errichtet man im Aufriſs auf DE in den Punkten U, V, W etc. Lote, gleich $\frac{1}{2}U_1U_2$, $\frac{1}{2}V_1V_2$, $\frac{1}{2}W_1W_2$ u. s. w., so sind die Punkte M, K und L Punkte der wirklichen Flächengestalt $EMKLA$, die jedoch nur zur Hälfte gezeichnet ist. Ist O der Halbierungspunkt

Digitized by Google

von AE, so ist $OP = \frac{1}{2} O_1 O_2$, welches auch mittels des Parallelkreises RS (der leicht in den Grundrifs zu übertragen ist) gefunden werden kann, die kleine Halbaxe.

Aufgabe 97. Es soll bewiesen werden, dafs die Schnittkurve eine Ellipse im Sinne der Fadenkonstruktion ist.

Aufl. In Figur 86 sei der Kegel mit der Schnittebene KL perspektivisch dargestellt (wobei aus Gründen der Deutlichkeit vorläufig nicht ganz korrekt gezeichnet ist). Von unten her läfst sich eine gewisse Berührungskugel in den Kegel schieben, die ihn selbst in dem Kreise CED berührt und die Schnittebene in P trifft. Auch in den Raum zwischen Schnittebene und Spitze läfst sich eine Berührungskugel hineinlegen, die den Kegel im Kreise AFB, die Ebene im Punkte Q berührt. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt X der zu untersuchenden Schnittkurve mit P und Q, so sind XQ und XP Tangenten an je eine der Kugeln. Zieht man ferner auf der Kegelfläche die Gerade ME durch X, so ist XF Tangente an die obere, XE Tangente an die untere Kugel. Tangenten, die von einem Punkte an eine Kugel gezogen werden, sind stets einander gleich, also ist in Wirklichkeit $XP = XE$, ebenso $XQ = XF$, folglich $PX + QX = FX + XE = FE$. Läfst man nun X auf der Schnittkurve wandern, so ändern sich zwar PX und QX, aber nicht die Länge FE, es bleibt also stets $PX + QX$ gleich der konstanten Gröfse FE. Die Schnittkurve hat demnach die charakteristische Eigenschaft der Ellipse, dafs die Summe der von den Brennpunkten P und Q ausgehenden Brennstrahlen konstant ist.

Aufgabe 97b. Figur 86 soll in Grundrifs und Aufrifs korrekt dargestellt und durch Drehungen in allgemeine Lage gebracht werden. (Man beginne mit der Lage, in der die schneidende Ebene als Linie erscheint.)

Aufgabe 98. Der in Figur 87 dargestellte, über die Spitze hinaus verlängerte Kreiskegel soll durch eine senkrechte Ebene geschnitten werden, die im Grundrifs als $A_1 B_1$ erscheint. Die Schnittkurve soll im Aufrifs konstruiert werden.

1te Aufl. Geschieht nach Art von Aufgabe 96.

2te Aufl. Man ziehe im Aufrifs die beliebige Horizontale PN, die im Grundrifs als Kreis über dem Durchmesser $P_1 N_1$ erscheint. Dieser schneidet im Grundrifs den Schnitt $A_1 B_1$ in den Punkten C_1 und D_1. Diese, senkrecht in den Aufrifs projiziert, geben auf PN die Punkte C und D der gesuchten Schnittkurve. Ebenso kann

Digitized by Google

man beliebig viele andere Punkte der Kurve konstruieren, von denen E, A und B besonders wichtige sind. (Im Grundrifs ist nur die Hälfte des Kegels gezeichnet worden.)

Aufgabe 99. Dieselbe Aufgabe für einen schrägen Schnitt durchzuführen, der beide Kegelteile trifft und im Aufrifs als gerade Linie erscheint.

Aufl. Geschieht wie bei Aufgabe 96.

Bemerkung: Die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels, welche beide Teile treffen, heifsen Hyperbeln. In Figur 87 nähert sich die Hyperbel immer mehr den beiden schrägen Geraden, ohne sie im Endlichen zu treffen. Diese Geraden sind die unten zu besprechenden Asymptoten der Kurve.

Aufgabe 100. Mit Hilfe von Berührungskugeln soll die Haupteigenschaft der Hyperbel aufgefunden werden.

Aufl. In Figur 88 ist der Kegel, der durch eine Ebene LN in seinen beiden Teilen geschnitten wird, perspektivisch dargestellt, wobei der Deutlichkeit halber vorläufig auf vollständige Korrektheit der Zeichnung verzichtet ist. In jeden Kegelmantel ist diejenige Berührungskugel eingezeichnet, die zugleich die Schnittebene berührt. Die obere Kugel berührt den Kegel in dem Kreise XYA, die Ebene im Punkte P. Die untere Kugel berührt den Kegel im Kreise WBZ, die Ebene in Q. Durch einen beliebigen Punkt X der Schnittkurve lege man auf der Kegelfläche die Gerade XM, welche die Berührungskreise in A und B trifft. (In unserer Zeichnung ist XM auf der Vorderseite, die Fortsetzung MA auf der Hinterseite des Kegels zu denken.) Zieht man ferner die Geraden XP und XQ, die in der Schnittebene liegen, so ist PX ebenso, wie AX, Tangente an die obere Kugel, beide sind demnach gleich, und QX ist ebenso, wie BX Tangente der unteren Kugel, beide sind also ebenfalls gleich. Durch Subtraktion erhält man $PX - QX = AX - BX = AB$. Wandert nun X auf der Schnittkurve, so ändern sich zwar PX und QX, aber $PX - QX$ bleibt gleich der unverändert bleibenden Gröfse AB. Die beiden Punkte P und Q nennt man Brennpunkte der Hyperbel. PX und QX sind Brennstrahlen. Für jeden Punkt der Hyperbel ist also die Differenz der Brennstrahlen eine konstante Gröfse.

Aufgabe 100b. Die Figur 88 soll in Grundrifs und Aufrifs korrekt gezeichnet und durch Drehungen in allgemeine Lage gebracht werden. (Man beginne mit dem Falle, in dem die Schnittebene als Gerade erscheint.)

Digitized by Google

Aufgabe 101. Von einer Hyperbel sind die beiden Brennpunkte und die konstante Differenz gegeben. Die Kurve soll gezeichnet werden.

Aufl. F und F_1 in Figur 89 seien die beiden Brennpunkte. Man schlage um F einen Kreis mit der konstanten Differenz d, die kleiner sein mufs als FF_1, da die Differenz zweier Dreiecksseiten stets kleiner ist, als die dritte. Will man nun auf der beliebigen Geraden FX den auf ihr liegenden Hyperbelpunkt suchen, so verbinde man den Schnittpunkt G von Kreis und Gerader mit F_1 und lege den Winkel XGF_1 bei F_1 an GF_1 so an, dafs das gleichschenklige Dreieck GF_1H entsteht. H ist dann der gesuchte Hyperbelpunkt. Solcher Punkte lassen sich unendlich viele konstruieren.

Beweis. $FH - F_1H = FH - GH = d$, wodurch der Bedingung genügt ist.

Bemerkung: Da die Konstruktion nach oben und unten wiederholt werden kann, so ist die Hyperbel symmetrisch gegen die Linie FF_1. Da man ferner den gröfseren Brennstrahl, statt von F, auch von F_1 ausgehen lassen kann, so ist die Hyperbel auch symmetrisch gegen das Lot, welches auf FF_1 im Halbierungspunkte M dieser Linie errichtet wird. Dafs die Höhe JH des Dreiecks GHF_1 Tangente der Hyperbel ist, wird sich später zeigen. — Die Hyperbel hat unendlich ferne Punkte. An Figur 89 erkennt man dies daran, dafs bei der Tangente F_1K, die an den Hilfskreis gelegt ist, die Linie FKZ bei K einen rechten Winkel giebt, dessen Übertragung nach F_1 die Parallele F_1Z_1 giebt. Das gleichschenklige Dreieck wird also unendlich hoch. Seine Spitze liegt senkrecht über der Mitte von F_1K, das Lot LZ, welches übrigens rückwärts verlängert den Halbierungspunkt M von FF_1 trifft (warum?), geht also nach dem unendlich fernen Punkte der Kurve. Dieser Linie kommt die Hyperbel, je weiter hinaus man sie konstruiert, immer näher, fällt jedoch im Endlichen nicht ganz mit ihr zusammen. Die Linie heifst daher, wie schon oben bemerkt wurde, Asymptote*) der Hyperbel. In Figur 90 ist eine Hyperbel dargestellt. Aus Gründen der obigen Symmetrie hat sie zwei Asymptoten und besteht sie aus zwei kongruenten Armen.

Setzt man

$$MF = MF_1 = e, \quad MA = MB = a,$$

so ist die konstante Differenz

*) $\sigma\upsilon\mu\pi\acute{\iota}\pi\tau\omega$ = zusammenfallen, $\grave{\alpha}$ = nicht.

Digitized by Google

$FB - F_1B = (e + a) - (e - a) = 2a$, d. h. $d = 2a = AB$.
Man nennt AB die Hauptaxe der Hyperbel, diese ist also gleich der konstanten Differenz. Das Dreieck FF_1D hat die Seiten

$$FD = 2a = d, \quad FF_1 = 2e, \quad F_1D = 2\sqrt{e^2 - a^2},$$

das Dreieck MCF_1 also die Seiten

$$MF_1 = e, \quad MC = a, \quad F_1C = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Da $MB = a$, so ist das rechtwinklige Dreieck MBE kongruent dem Dreieck MCF_1, folglich ist

$$ME = e \quad \text{und} \quad BE = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Setzt man $BE = b$, so hat man

$$b^2 = e^2 - a^2, \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 = e^2,$$

eine Gleichung, die an eine analoge bei der Ellipse erinnert. Das Hauptresultat ist folgendes: Das Lot auf der Axe im Scheitel B schneidet auf der Asymptote die Strecke $ME = e$ ab. Schlägt man also mit ME um M einen Kreis, so findet man die Brennpunkte F und F_1.

Ist $a = b$, so heifst die Hyperbel gleichseitig. Ihre Asymptoten stehen dann aufeinander senkrecht. Man nennt aus Gründen der Analogie die Längen a und b die beiden Axen der Hyperbel. Für $a = b$ war die Ellipse ein Kreis. Was also der Kreis für die Ellipsen ist, das ist die gleichseitige Hyperbel für die übrigen Hyperbeln, die sich alle durch proportionale Verkürzung oder Verlängerung paralleler Sehnen aus ihr erzeugen lassen.

Durch den Kegel (Figur 88) lassen sich durch verschieden gerichtete Schnitte Hyperbeln mit allen möglichen Asymptotenwinkeln legen. Jede derselben ist eine Zentralprojektion jeder anderen, denn von M aus gehen nach allen Punkten jeder Hyperbel gerade Linien. Denkt man sich den Punkt M nach links in unendlicher Entfernung, so handelt es sich um Parallelprojektionen. Die Figur 88 ist dann so zu denken, dafs über der gezeichneten Hyperbel ein gerader oder schräger Cylinder (also mit hyperbolischer Grundfläche) steht. Die Schnitte durch denselben geben im allgemeinen stets wieder Hyperbeln. Also: Durch Parallelprojektion geht jede Hyperbel wieder in eine Hyperbel über; die Asymptoten der ersten werden dabei Asymptoten der zweiten.

Daraus folgt eine die Zeichnung der Hyperbel erleichternde Eigenschaft. In Figur 90 ist bei dem Lote LH (zur Axe) aus Gründen der Symmetrie $HJ = KL$. Parallelprojektion verwandelt

Digitized by Google

diese Hyperbel in eine andere, bei der die HL entsprechende Linie nicht mehr senkrecht zur Axe zu stehen braucht. Trotzdem bleiben die Projektionen der Stücke HJ und KL gleich. Daraus läfst sich folgender Satz ableiten: Legt man durch die Hyperbel eine beliebige Sekante, so sind die beiden Stücke zwischen Sekante und Asymptote einander gleich. Daraus folgt für die Tangente, dafs der Berührungspunkt das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben halbiert.

Aufgabe 102. Von einer Hyperbel sind die Asymptoten und ein Punkt gegeben. Sie soll konstruiert werden.

Aufl. XY und VZ in Figur 91 seien die beiden Asymptoten, A der gegebene Punkt. Durch ihn lege man beliebig BC und mache $CD = AB$, dann ist D ein Punkt der Hyperbel. Ebenso kann man beliebig viele Punkte D_1, D_2, D_3 ..... konstruieren, indem man B_1C_1, B_2C_2 u. s. w. durch A zieht und

$$C_1D_1 = AB_1, \quad C_2D_2 = AB_2$$

u. s. w. macht.

Bemerkung: Durch die oben besprochene Parallelprojektion gehen parallele Sehnen wie HL und NQ in Figur 90 wieder in parallele Sehnen über, ihre Halbierungspunkte R und S wieder in Halbierungspunkte, die Axe SRM in eine Linie durch den neuen Mittelpunkt. Daraus folgt, dafs Halbierung paralleler Sehnen die Konstruktion einer Linie ermöglicht, die durch den nicht gegebenen Mittelpunkt einer Hyperbel geht. So zusammengehörige Richtungen heifsen ebenso, wie bei der Ellipse, konjugierte Richtungen. Da in Figur 90 die Tangente $UE \parallel HL \parallel NQ$ ist, so folgt, dafs die Tangente in jedem Hyperbelpunkte mit Hilfe konjugierter Richtungen, wie bei der Ellipse, gefunden werden kann.

Aufgabe 103. Gegeben eine Hyperbel. Ihr Mittelpunkt, ihre Axen, ihre Asymptoten und ihre Brennpunkte sollen konstruiert werden.

Aufl. Man ziehe (Figur 92) in der gegebenen Hyperbel zwei parallele Sehnen AB und CD, halbiere sie in E und F, ziehe EF, welches in G und H schneidet und halbiere GH in M, so hat man den Mittelpunkt. Mit einem beliebigen Radius schlage man um M einen Kreisbogen, der die Hyperbel in J und K schneidet, um J und K schlage man mit gleicher Zirkelöffnung Kreisbogen, die sich in L schneiden und ziehe LM, welches in N und O schneidet. ON ist dann die Axe.

Die Asymptoten und Brennpunkte kann man folgendermafsen

Digitized by Google

finden. Durch Halbierung des rechten Winkels bei M in Figur 93 erhält man die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, die durch O geht. Durch O ziehe man beliebig AB von Asymptote zu Asymptote und mache $BE = AO$, dann ist E ein Punkt der durch O gehenden gleichseitigen Hyperbel. Die gegebene Hyperbel kann man sich aus der gleichseitigen (wie die Ellipse aus dem Kreise) durch proportionale Verkürzung aller Senkrechten zur Axe entstanden denken. (Wie bei der Orthogonalprojektion.) Das Lot EC schneide in D, dann ist $EC : DC$ das Verhältnis der Verkürzung. Zieht man nun das Lot OG, sodann EG bis zum Schnitte N mit der Axe, und endlich DN, welches den Schnitt H giebt, so hat man in H einen Punkt der Asymptote MH gefunden. Der Kreis um M mit MH giebt die Brennpunkte F und F_1.

Dafs H ein Punkt der Asymptote ist, folgt aus der Proportion

$$EC : DC = GH : HO,$$

d. h. das Lot OH ist im richtigen Verhältnis verkürzt worden.

Bemerkung: Da die sämtlichen Hyperbeln durch Verkürzung oder Verlängerung von Loten aus der gleichseitigen abgeleitet werden können, soll noch eine wichtige Konstruktion der letzteren angegeben werden.

[**Aufgabe 104.** Man errichte auf einer Geraden (Figur 94) in der Entfernung 1 vom Punkte O das Lot 1, in Entfernung 2 das Lot $\frac{1}{2}$, in Entfernung 3 das Lot $\frac{1}{3}$ u. s. w., ganz allgemein in Entfernung x das Lot $\frac{1}{x}$. Es soll bewiesen werden, dafs man so Punkte einer gleichseitigen Hyperbel erhält.

Beweis: In Figur 94 sei die beschriebene Konstruktion durchgeführt. Man halbiere den rechten Winkel bei O durch die Linie CD, die durch die Endpunkte der Lote $+1$ und -1 geht, errichte auf AB in B ein Lot, welches also den Punkt 2 trifft, und schlage mit Radius 2 um O einen Kreis, der CD in F und F_1 schneidet. Ist nun P ein nach angegebener Methode konstruierter Punkt der Kurve, und kann man beweisen, dafs, welcher dieser Punkte es auch sei, $F_1P - FP$ eine konstante Gröfse, und zwar $2\sqrt{2}$ ist, so ist gezeigt, dafs es sich um eine Hyperbel handelt, die eine gleichseitige sein mufs, da sie sich Asymptoten annähert, die einen rechten Winkel bilden.

Man setze $OE = x$, also $EP = \frac{1}{x}$, ferner setze man $F_1P = p$, $FP = q$, und bedenke, dafs

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

$$GE = x,\ OG = x\sqrt{2},\ \text{und}\ OF_1 = OF = 2$$

ist. Nach dem Pythagoreischen Satze für die dem stumpfen Winkel $(90 + 45^0)$ gegenüberliegende Seite ist dann

$$p^2 = F_1G^2 + PG^2 + 2F_1G \,.\, PG \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}} = (2 + x\sqrt{2})^2 + \left(\tfrac{1}{x} - x\right)^2 + 2\,(2 + x\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{x} - x\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich zu

$$x^2 + 2x\sqrt{2} + 4 + \tfrac{2\sqrt{2}}{x} + \tfrac{1}{x^2},$$

was sich als

$$\left(x + \sqrt{2} + \tfrac{1}{x}\right)^2$$

schreiben läfst, so dafs

$$p = x + \sqrt{2} + \tfrac{1}{x} \text{ ist.}$$

Ebenso ist

$$q^2 = FG^2 + PG^2 - 2FG \,.\, PG\sqrt{\tfrac{1}{2}} = (2 - x\sqrt{2})^2 + \left(\tfrac{1}{x} - x\right)^2 - 2\,(2 - x\sqrt{2})\left(\tfrac{1}{x} - x\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

was sich als

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 4 - \tfrac{2\sqrt{2}}{x} + \tfrac{1}{x^2}$$

oder als

$$\left(x - \sqrt{2} + \tfrac{1}{x}\right)^2$$

schreiben läfst. Es ist also

$$q = x - \sqrt{2} + \tfrac{1}{x}.$$

Folglich ist:

$$p - q = \left(x + \sqrt{2} + \tfrac{1}{x}\right) - \left(x - \sqrt{2} + \tfrac{1}{x}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Wo also auch P auf der Peripherie gewählt sein mag, stets ist $p - q = 2\sqrt{2}$, also die Kurve eine Hyperbel und zwar aus obigem Grunde eine gleichseitige.

Bemerkung: Multipliziert man jedes Lot mit seinem Abstande von O, also 1 mit 1, 2 mit $\frac{1}{2}$, 3 mit $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ mit 2, $\frac{1}{3}$ mit 3 u. s. w., so erhält man stets das Produkt 1, d. h. das Rechteck aus Lot und Abstand ist für die gleichseitige Hyperbel eine konstante Gröfse.

Durch Parallelprojektion gilt dies nun modificiert von jeder Hyperbel, so dafs folgende Aufgabe gelöst werden kann:

Digitized by Google

Aufgabe 105. Gegeben sind die Asymptoten einer Hyperbel und ihr Scheitelpunkt A (Figur 95), sie soll mit Hilfe von Parallelen zur Asymptote fertig konstruiert werden.

Aufl. Man ziehe durch A die Parallele AB zur einen Asymptote (wobei MBA die Hälfte des Rhombus $ABMC$ wird), und setze $MB = BA = 1$. In den Entfernungen 2, 3, 4 ... von M ziehe man Parallele zur Asymptote MC, deren Längen sein sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. Die Endpunkte der Linien liegen dann sämtlich auf der gesuchten Hyperbel. (In der Figur ist nur der eine Arm der Hyperbel gezeichnet.)

Bemerkung: Die Parallelogramme aus 1 und 1, $\frac{1}{2}$ und 2, $\frac{1}{3}$ und 3 etc. sind sämtlich inhaltsgleich. — Figur 94 hat eine wichtige physikalische Bedeutung bei der graphischen Darstellung des Mariotteschen Gesetzes.]

Aufgabe 106. Der in Figur 96 in Grund- und Aufriſs dargestellte gerade Kreiskegel werde durch die Ebene DE (im Aufriſs als gerade Linie erscheinend) parallel zu AC geschnitten. Wie sieht die Schnittlinie im Grundriſs aus und welches ist ihre wahre Gestalt?

Aufl. Die Auflösung erfolgt ebenso, wie bei dem Ellipsen- und Hyperbelschnitt. Im Aufriſs ist die wahre Gestalt zur Hälfte angegeben.

Bemerkung: Denkt man sich in den Raum $ACDE$ die Berührungskugel eingelegt, so giebt der Berührungspunkt Q auch hier den Brennpunkt der Schnittkurve. Dieselbe läſst sich als Ellipse betrachten, deren Mittelpunkt und zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegen, oder auch als Hyperbel, deren zweiter Arm in unendlicher Entfernung liegt, denn den Schnitt der Parallelen AC und DE kann man sich in unendlicher Entfernung unten oder auch oben denken. Die Kurve, Parabel genannt, ist also ein Mittelding zwischen Hyperbel und Ellipse, deren Konstruktionen zum Teil auf sie angewendet werden können.

Aufgabe 106b. Figur 96, mit der Berührungskugel, soll durch Drehungen in allgemeine Lage gebracht werden.

Aufgabe 107. Die Brennpunktkonstruktion der Ellipse soll auf die Parabel übertragen werden.

Aufl. In Figur 97 sei CX ein Teil der Parabelaxe, F der eine Brennpunkt, der andere, F_1 auf CX in unendlicher Entfernung. Bei der Ellipsenkonstruktion wurde um F_1 ein Kreis geschlagen, dessen Radius die konstante Summe der Radii vectores war. Diese Summe

Digitized by Google

ist hier unendlich grofs, der Kreis wird also hier eine gerade Linie KL senkrecht zu CX, die in einem Punkte D links von C schneidet, für den, wie bei der Ellipse, $CD = CF$ ist. Die von F_1 aus zu ziehenden Radien sind hier sämtlich parallel zu CX. Ein solcher sei F_1A. Um auf ihm den Parabelpunkt P zu finden, ziehe man AF und trage den Winkel PAF bei F so an AF an, dafs das gleichschenklige Dreieck AFP entsteht. Dann ist P einer der Parabelpunkte, deren man beliebig viele konstruieren kann.

Bemerkung: KL heifst die Direktrix der Parabel. Der Abstand DF heifst der Halb-Parameter der Parabel. Das Quadrat über DF giebt auch Parabelpunkte Q und Q_1 (warum?).

Das Lot FQ im Brennpunkte ist demnach gleich dem Halb-Parameter p, QQ_1 also ist der Parameter. Parameter heifst so viel wie Mafsstab. In der That hängt der Mafsstab, in dem die Parabel gezeichnet wird, von DF ab.

Aufgabe 108. Es soll bewiesen werden, dafs die Lote auf der Scheiteltangente bis zur Parabel sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

Beweis. In Figur 98 sei EX die Axe, KL die Direktrix, ON die Scheiteltangente, F der Brennpunkt, also

$$EF = p, \quad ED = DF = \frac{p}{2}.$$

Der Punkt C habe von dem Scheitel den Abstand $CD = y$, die Lotlänge bis zur Parabel sei $CP = x$. Dann ist $AP = x + \frac{p}{2}$, also, da APF das gleichschenklige Dreieck ist, auch $FP = x + \frac{p}{2}$. Ferner ist FG die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks FPG, gleich

$$DG - DF = x - \frac{p}{2}.$$

Nach Pythagoras ist aber

$$\overline{PG}^2 = \overline{PF}^2 - \overline{FG}^2,$$

oder

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px - \left(x^2 + \frac{p^2}{4} - px\right) = 2px.$$

Ist nun so für das Lot CP die Gröfse

$$y^2 = 2px,$$

für irgend ein anderes der Lote

$$y_1^2 = 2px_1,$$

so folgt durch Division

Digitized by Google

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1},$$

d. h. die Lotlängen x verhalten sich wie die Quadrate der Abstände y.

Bemerkung: Markiert man auf einer Geraden Punkte 0, 1, 2, 3, ... und errichtet man in ihnen die Lote 0, h, $4h$, $9h$ u. s. w. wie in Figur 99, so liegen die Endpunkte auf einer Parabel. (Wurfbahn eines Geschosses.)

Bemerkung: Durch Parallelprojektion geht jede Parabel wieder in eine Parabel über. Die Scheiteltangente wird dann Tangente in einem andern Punkte, die Lote bleiben der Axe parallel, und für diese Parallelen bleibt das eben bewiesene quadratische Gesetz bestehen. Figur 99 kann also in der Art wiederholt werden, dafs die Lote h, $4h$, $9h$ u. s. w. senkrecht bleiben, dafs sie jedoch von einer schrägen Linie ausgehen.

Aufgabe 109. Es soll bewiesen werden, dafs die Halbierung des Brennstrahlenwinkels (oder seines Nebenwinkels) bei jedem Kegelschnitt die Tangente giebt.

a) Ellipse. In Figur 100 sei AC die in B berührende Tangente. Sind F und F_1 die Brennpunkte, so ist für alle Punkte der Ellipse $p + q = 2a$, wo $2a$ die grofse Axe ist, für alle Punkte aufserhalb der Ellipse ist aber $p + q > 2a$ (der Faden müfste ausgedehnt werden!). Da nun alle Punkte einer Kreistangente, mit Ausnahme des Berührungspunktes, aufserhalb des Kreises liegen, so gilt das Entsprechende durch Projektion von der Ellipsentangente. Verbindet man also irgend einen Punkt D der Tangente mit F und F_1, so ist $FD + F_1D > 2a$, nur für B ist $p + q = 2a$. Folglich ist der gebrochene Weg FBF_1 der kürzeste, der von F nach der Tangente und sodann nach F_1 führt.

Sind nun F und F_1 zwei beliebige Punkte auf derselben Seite einer beliebigen Geraden AC*), und soll der eben beschriebene kürzeste Weg gesucht werden, so kann dies folgendermafsen geschehen: Man fälle von F_1 aus das Lot F_1K auf AC und verlängere es um sich selbst bis G. Dann ist jeder Weg FDG gleich dem Wege FDF_1. Statt also zu untersuchen, wann FDF_1 der kürzeste Weg ist, kann man untersuchen, wann FDG der kürzeste Weg ist. Letzteres ist aber der Fall bei der geraden Linie FG, die in B schneiden mag, also ist auch FBF_1 der gesuchte kürzeste Weg. Dabei ist aber

*) Die nötige Figur ist hier nicht besonders gezeichnet worden.

Digitized by Google

$$\triangle F_1KB \cong KBG,$$

also ist der Winkel F_1BG halbiert, und es ist zugleich Winkel

$$F_1BK = FBA,$$

da beide gleich KBG sind. Es wird gewissermafsen der Lichtstrahl FB von dem Spiegel AC unter gleichem Winkel reflektiert.

Dies findet statt beim kürzesten Wege FBF_1. Bei der Ellipsenzeichnung Figur 100 war aber FBF_1 in der That der kürzeste Weg, also ist der Nebenwinkel des Brennstrahlenwinkels halbiert.

Bemerkung: Ein in F aufgestelltes Licht sende Strahlen nach dem Ellipsenrande, der sie wie ein Spiegel reflektieren soll. Alle reflektierten Strahlen gehen dann nach F_1, F_1 ist also hell und zugleich erwärmt, der Name Brennpunkt ist also ganz bezeichnend.

b) Parabel. Von ihr gilt dasselbe wie von der Ellipse, da jedoch F_1 unendlich fern liegt, so ist der Strahl XB parallel zur Axe zu denken. Der Winkel FBY ist zu halbieren, wenn man die Tangente haben will. (Figur 101.)

Bemerkung: Fallen die Sonnenstrahlen parallel zur Axe in einen parabolischen Hohlspiegel, so werden sie sämtlich nach dem Brennpunkte F reflektiert. Steht in letzterem ein Licht, so werden alle Strahlen parallel zur Axe reflektiert. In Figur 98 ist PY die Tangente und $\triangle CPY \cong DYZ$, also ist für jede Tangente $ZD = DG$. Die Konstruktion der Tangente für beliebige Parabelpunkte ist also sehr leicht. Die Richtung der Axe einer gegebenen Parabel findet man durch Halbierung paralleler Sehnen. Halbierung eines Lotes zu dieser Richtung führt auf die Axe selbst. Reflexion eines Strahls, der ihr parallel ist, von der Tangente im Endpunkte giebt den Brennpunkt.

c) Hyperbel. Da auch die Hyperbel durch Zentralprojektion eines Kreises erzeugt werden kann, so hat auch ihre Tangente nur einen Punkt mit ihr gemein. Für den Berührungspunkt B in Figur 102 ist $FB - F_1B = 2a$. Alle anderen Punkte der Tangente liegen in dem Raume, wo $p - q < 2a$ ist. Der Berührungspunkt B ist also der Punkt der Tangente, für welchen die Differenz $FB - F_1B$ gröfser ist als für jeden andern.

Ist nun AC eine beliebige gerade Linie und sind F und F_1 zwei Punkte auf verschiedenen Seiten derselben, und verlängert man das Lot F_1K um sich selbst bis G, so ergiebt sich Folgendes: Ist D ein beliebiger Punkt der Tangente, so ist

$$FD - F_1D = FD - DG.$$

Digitized by Google

Zieht man dagegen FG bis B und aufserdem F_1B, so ist

$$FB - F_1B = FB - BG = FG.$$

Nun ist aber die Dreiecksseite FG gröfser als die Differenz der beiden andern, $FD - DG$, also ist $FB - F_1B$ gröfser als $FD - F_1D$, wo auch D auf der Tangente liege, d. h. $FB - F_1B$ ist die gröfste mögliche Wegdifferenz. Dabei ist aber Winkel FBF_1 halbiert, was an keiner andern Stelle der Fall ist.

Nun hatte man aber auch bei der Hyperbeltangente für den Punkt B das Maximum der Wegdifferenz, also ist auch dort Winkel FBF_1 halbiert.

Bemerkung: Alle von F ausgehenden Strahlen werden an der Hyperbel so reflektiert, dafs sie rückwärts verlängert durch den anderen Brennpunkt gehen. (Folgt aus dem Vorigen.)

Diese über die Kegelschnitte gegebenen Sätze werden viele der folgenden Konstruktionen erleichtern.

Aufgabe 110. Ein gerader Kreiskegel soll durch ein Prisma durchdrungen werden. Die Schnittlinien sind in Grund- und Aufrifs zu konstruieren.

Bemerkung: Die Auflösung geschieht ähnlich wie bei dem Cylinder.

[**Aufgabe 111.** Ein gerader Kreiskegel soll durch einen Kreiscylinder durchdrungen werden.]

Aufgabe 112. Einige der in diesem Abschnitte vorkommenden Zeichnungen sind in Parallelperspektive wiederzugeben.

Bemerkung: Die Spitze des senkrecht stehenden Kreiskegels kommt dabei stets senkrecht über der Mitte des Grundkreises zu liegen, der in bekannter Weise als Ellipse zu zeichnen ist und zwar behält die Höhe des Kegels die ursprüngliche Länge.

Bemerkung: Es kann bewiesen werden, dafs in einen Kreiskegel alle möglichen Kegelschnitte so eingelegt werden können, dafs alle ihre Punkte in der Kegelfläche liegen.

Die Kegelschnitte sind von derartiger Wichtigkeit, dafs ihre Haupteigenschaften besonderer Hervorhebung bedurften. Die Ellipse tritt bei zahlreichen Zeichnungen auf und ist auch für die Technik und das Kunstgewerbe von Bedeutung. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen um die Sonne, die in dem gemeinsamen Brennpunkte aller dieser Ellipsen steht. Der Meridianschnitt der abgeplatteten Erde ist eine Ellipse. — Die Parabel ist von Wichtigkeit als die Wurfbahn der Körper (im luftleeren Raume), sie ist die Kurve für das

Digitized by Google

Aufsteigen der Wasseroberfläche in einem rotierenden Gefäfse, worauf die Konstruktion des parabolischen Regulators beruht. Der parabolische Hohlspiegel war bereits genannt. Die Parabel dient zur Veranschaulichung der Trägheitsmomente ebener Flächen, sie ist die Profilkurve für gewisse Körper gleicher Biegungsfestigkeit. Die Technik kennt aufserdem parabolische Gitterträger und parabolische Hängebrücken. In der Kinematik wird der Satz bewiesen, dafs, wenn die Parabel ohne Gleitung auf einer Geraden rollt, der Brennpunkt die sehr wichtige Kettenlinie beschreibt. Aus Figur 99 läfst sich ableiten, dafs eine Parabel ausschattiert wird, wenn man zwei beliebig sich schneidende Gerade in gleiche Teile teilt, die Teilpunkte auf jeder von beliebiger Stelle aus numeriert und die gleichnamigen verbindet. — Die Hyperbel dient zur graphischen Berechnung der Expansionsarbeit auf Grund des Mariotteschen Gesetzes. Ihr Flächeninhalt veranschaulicht den Wert der Logarithmen. In Figur 94 z. B. ist unter den dort gemachten Voraussetzungen der Inhalt der über der Horizontalen liegenden Fläche, von 1 bis 2 genommen, gleich dem natürlichen Logarithmus von 2, von 1 bis 3 genommen, gleich dem natürlichen Logarithmus von 3, u. s. w. Auf die aus dem sogenannten Pascalschen Satze entspringenden Kegelschnittkonstruktionen mit Hilfe des Lineals allein (ohne Gebrauch des Zirkels) und auf die Theorie von Pol und Polare kann hier nicht eingegangen werden.

Jeder Kegelschnitt erscheint in der Projektion wieder als Kegelschnitt. Der über einem Kegelschnitt stehende Cylinder, mag er gerade, oder schräg sein, kann demnach sowohl bei horizontaler als auch bei schräger Abstumpfungsfläche leicht gezeichnet werden.

§ 17.

Die Kugel in orthogonaler Projektion.

Aufgabe 118. Die einbeschriebene und die umbeschriebene Kugel des Würfels in Grund- und Aufrifs zu zeichnen, und zwar in verschiedenen Lagen.

Aufl. In Figur 103 ist der Würfel zunächst in einfachster Stellung gezeichnet. Die in die beiden Quadrate eingezeichneten Kreise stellen die einbeschriebene Kugel dar.

Den Radius der umbeschriebenen findet man, indem man die Grundrifsfigur um 45^0 dreht und für das im Aufrifs entstehende Rechteck $AD\,GF$ den umbeschriebenen Kreis zeichnet. Warum?

Digitized by Google

In der Figur ist noch eine weitere Drehung durchgeführt. Eine dritte würde die ganz allgemeine Lage geben.

Bemerkung: Nur bei speziellen Lagen liegen die Würfelecken zum Teil auf der Peripherie des Kreises, der die gröfsere Kugel darstellt. — Die Berührungspunkte der Innenkugel mit den Würfelflächen findet man, indem man die Diagonalen der Parallelogramme unserer Zeichnung zieht.

Aufgabe 114. Dieselbe Aufgabe mit dem regelmäfsigen Tetraëder durchzuführen.

Bemerkung: Ist h die Höhe des Tetraëders, so werden die Radien

$$\varrho = \frac{h}{4}, \quad r = \frac{3h}{4},$$

so dafs die Zeichnung für die einfachste Lage leicht durchzuführen ist. Die Drehungen geben das Allgemeinere.

Aufgabe 115. Dieselbe Aufgabe soll für das regelmäfsige Oktaëder, Pentagon-Dodekaëder und Ikosaëder durchgeführt werden.

Aufgabe 116. Die Erdkugel mit dem Gradnetz, d. h. mit den Meridianen und Parallelkreisen, in Grund- und Aufrifs zu zeichnen und durch Drehungen in allgemeine Lage zu bringen.

Aufl. Die Parallelkreise erscheinen im Aufrifs bei der für Figur 104 zuerst gewählten Lage als horizontale Gerade, der Nordpol liegt oben, der Südpol unten, der horizontale Durchmesser stellt den Äquator dar. Der Bogen AN ist beispielshalber in vier gleiche Teile geteilt, so dafs die Parallelkreise $22\frac{1}{2}^0$, 45^0, $67\frac{1}{2}^0$ gezeichnet sind, die durch C, D und E gehen. Projiziert man diese Punkte senkrecht nach dem Grundrifs hinab, so findet man auf dem horizontalen Durchmesser die Punkte C, D und E, durch welche dort die entsprechenden konzentrischen Kreise gehen. Dort ist der äufserste Kreis der Äquator, der durch die Meridiane, die als Gerade erscheinen, regelmäfsig eingeteilt wird. In der Figur sind auch hier die Winkel $22\frac{1}{2}^0$, 45^0 und $67\frac{1}{2}^0$ gewählt, wobei man die projizierenden Vertikalen wieder benutzen konnte.

Jeder Meridian erscheint im Aufrifs als halbe Ellipse und ist nach folgender Methode zu konstruieren: HN im Grundrifs schneidet die Parallelkreise in H, K, L, P und N. Jeder der Punkte ist senkrecht in den Aufrifs zu übertragen, und zwar auf den entsprechenden Parallelkreis. So erhält man für die Ellipse die Punkte N, P, L, K, H, K_1, L_1, P_1, S, und ebenso findet man leicht noch beliebig

Digitized by Google

viele andere. Die übrigen Ellipsen sind auf dieselbe Art zu konstruieren.

Bemerkung: In der Figur ist noch eine Drehung durchgeführt, wobei die einzelnen Punkte des Gradnetzes durch Parallelverschiebung und Vertikalprojektion gefunden werden. Sowohl die Meridiane, als auch die Parallelkreise erscheinen jetzt im Grundriſs als Ellipsen. Die letzteren geben lauter ähnliche Ellipsen. Die Punkte des Randes, wo die Meridiane verschwinden, liegen senkrecht unter denen des Aufrisses, wo die Meridiane den horizontalen Durchmesser schneiden. Die Verschwindungspunkte jedes Meridians liegen einander diametral gegenüber. Alle Ellipsen, die den Rand treffen, schmiegen sich tangential an diesen an, stoſsen also nicht unter irgend einem Winkel auf ihn.

Aufgabe 117. Die Durchdringung eines dreiseitigen Prismas und einer Kugel zu zeichnen.

Aufl. In Figur 105 ist eine einfache Lage insofern gewählt, als das Prisma senkrecht steht. Seine Grundfläche ist DEF. Oben und unten ist das sich Entsprechende gleichnamig gemacht. Verlängert man im Grundriſs AB bis zum Rande, so findet man Punkte G und H, die vertikal in den Aufriſs zu übertragen sind. Dort, wie im Grundriſs, sei J der Halbierungspunkt von GH. Macht man dann im Aufriſs JK und JK_1 gleich JG im Grundriſs, dann sind im Aufriſs GH und KK_1 die Hauptaxen der Ellipse, welche den Kreis darstellt, in dem die verlängerte Prismenfläche (die im Grundriſs als GH erscheint) die Kugel schneidet. Man zeichne diese Ellipse nach bekannter Methode. Ihr Bogen $\alpha\beta$, ebenso $\alpha_1\beta_1$ giebt die Grenze der Sichtbarkeit für die Schnittebene an.

Die Linie BC im Grundriſs schneidet den Rand in den Punkten L und N, die wiederum auf den horizontalen Durchmesser des Aufrisses zu übertragen sind. Ist O oben und unten der Halbierungspunkt von LN, und macht man im Aufriſs OY und OY_1 beide gleich OL im Grundriſs, so sind LN und YY_1 im Aufriſs die Hauptaxen einer zweiten Ellipse, die ebenfalls zu zeichnen ist. Da LN im Grundriſs den horizontalen Durchmesser in X schneidet, so sind die senkrecht über diesem Punkte liegenden Punkte X und X_1 des Aufriſskreises die Verschwindungspunkte für diese Ellipse. Von dem Ellipsenbogen $\beta\gamma$ oder $\beta_1\gamma_1$ ist also nur βX resp. $\beta_1 X_1$ sichtbar.

Bemerkung: Drehungen der Figur geben bei geeigneter Wahl des Drehungswinkels sehr plastische Darstellungen, die für andere Aufgaben als Muster dienen mögen.

Digitized by Google

[**Aufgabe 118.** Die Kugel durch Parallelkreise und Meridiane in ein Netz „ähnlicher Rechtecke“ einzuteilen.

Aufl. In Figur 106 sei AB im Aufriſs der Äquator, CD ein willkürlich angenommener Parallelkreis, EF der in gleichem Abstande befindliche. Man ziehe die Tangente in C, die die Axe in einem Punkte P trifft. Zieht man dann PA und PE, so erhält man die Schnittpunkte G und J für zwei neue Parallelkreise GH und JK, denen wieder die symmetrisch liegenden durch L und N entsprechen. Mit den Geraden PL und PN fahre man in dieser Weise fort, bis die Parallelkreise in der Nähe der Pole unendlich dicht aufeinander folgen.

Die Konstruktion der Parallelkreise im Grundriſs geschieht wie früher, ebenso die der Meridiane im Grund- und Aufriſs.

Bemerkung: Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion wird mit Hilfe der reziproken Radii vectores geführt. Da nämlich $PA \,.\, PG = \overline{PC}^2$ ist, so wird, wenn man $PC = 1$ setzt, $PG = \frac{1}{PA}$, ebenso $PJ = \frac{1}{PE}$. Jeder Punkt des Netzes oberhalb PC ist also der reziproke Punkt zu einem des Netzes unterhalb CD. Daraus läſst sich ferner nachweisen, daſs einem sehr kleinen Rechteck ein kleines, dem ersteren ähnliches Rechteck entspricht, denn die Transformation mittels reziproker Radien ist „winkeltreu.“ Unabhängig davon läſst sich folgender Beweis führen: Eine dreiseitige Pyramide möge eine Kugel so durchdringen, daſs beim Aus- und Eintritt kleine Bogendreiecke gebildet werden. Aus elementargeometrischen Gründen haben diese Bogendreiecke gleiche Winkel. Sind die Dreiecke so klein, daſs man die Bogen als Gerade ansehen kann, so handelt es sich demnach um ähnliche Dreiecke. Dies gilt hier von den sich zu zweien entsprechenden Rechtecken, die man durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt denken kann. Zunächst sind hier zwei Rechtecke ähnlich, jedes von ihnen ist einem symmetrischen desselben Meridianstreifens kongruent, diese sind wieder anderen ähnlich, und so folgt, daſs alle Rechtecke unter sich ähnlich sind.

Bei der Zentralprojektion kommt dieser Punkt noch einmal zur Sprache. — Von Wichtigkeit ist die Konstruktion für die folgende kartographische Aufgabe.]

[**Aufgabe 119.** Die Oberfläche des Globus soll mit den Länderformen in den kleinsten Teilen ähnlich auf einen unendlich langen ebenen Parallelstreifen übertragen wer-

Digitized by Google

den, d. h. die Mercatorkarte soll mit möglichster Genauigkeit konstruiert werden.

Aufl. Man teile zunächst den Globus nach voriger Aufgabe durch Meridiane und Parallelkreise in ein System „ähnlicher Rechtecke" ein.

Ist z. B. der Äquator, wie in Figur 106, in 16 gleiche Teile eingeteilt, so zeichne man in der Ebene eine in 16 gleiche Abschnitte geteilte Horizontale, lege durch alle Teilpunkte Lote und schneide durch Horizontale, die in gleichen Abständen aufeinander folgen, Rechtecke ab, die denen der Globusfläche ähnlich sind, was mit um so gröfserer Genauigkeit geschehen kann, in je zahlreichere Teile man den Äquator zerlegt hatte.

Da nun die Einteilung des Globus theoretisch unendlich viele Rechtecke umfafst, denn nach den Polen hin werden diese unendlich klein, so mufs der Parallelstreifen nach oben und unten sich ins Unendliche erstrecken.

Bemerkung: Die Äquatorialrechtecke auf Globus und Ebene mögen in der Gröfse übereinstimmen. Da die Rechtecke in der Ebene alle gleich grofs sind, während sie auf dem Globus in den Polargegenden schliefslich unendlich klein werden, so erscheinen die Polargegenden auf dem Streifen sehr stark vergröfsert, der Pol selbst unendlichfach vergröfsert.

Dies stimmt damit überein, dafs auf dem Globus die Meridiane in den Polen zusammentreffen, während sie in dem Streifen überall gleichen Abstand behalten. Trägt man also die Länderumrisse in das so gewonnene Rechtecksnetz ein, so erhält man ganz bedeutende Verzerrungen. Grönland z. B. erscheint gröfser als Afrika. Durch den zufälligen Umstand aber, dafs die Polarregionen noch unerforscht sind, bleibt die Mercatorkarte für alle bekannten Regionen brauchbar. In einer Hinsicht ist sie sogar allen anderen Karten überlegen: schräg durch die Karte gelegte Gerade schneiden nämlich alle Meridiane unter konstantem Winkel. Ein Schiff also, welches auf der Erdkugel stets nach derselben Himmelsrichtung fährt, legt einen Weg zurück, der auf dem Globus und den meisten Karten als komplizierte Kurve (Loxodrome) erscheint, auf der Mercatorkarte aber als gerade Linie auftritt. Daher ist letztere Karte allgemein als Seekarte verbreitet.

Man erhält durch diese Betrachtung einen Einblick in die kartographischen Theorien, besonders in die der „konformen Abbildungen", mit denen sich Mathematiker, wie Gaufs und vor ihm Lambert

Digitized by Google

und Lagrange, nach ihm Jacobi und Riemann vielfach beschäftigt haben.]

[**Aufgabe 120.** In das Rechtecksnetz der Figur 106 die Diagonalkurven, also ein System von Loxodromen, einzuzeichnen.

Bemerkung: In Figur 107 ist die Aufgabe gelöst, und zwar sind die Diagonalen von Doppelquadraten gezeichnet, wobei eine quadratische Einteilung durch Loxodromen gewählt ist.]

[**Aufgabe 121.** Die Kugeloberfläche durch ein Kreisbüschel, welches durch zwei beliebige Oberflächenpunkte geht, und durch die orthogonale Kreisschar in ein Netz ähnlicher Rechtecke einzuteilen.

Aufl. In Figur 108, die im Aufriſs nur die „Kreisschar", im Grundriſs nur das „Kreisbüschel" enthält, ist gezeigt, daſs man ganz ähnlich, wie bei Figur 106, zum Ziele gelangt. Das Kreisbüschel gehe durch die Punkte G und H des Aufrisses, deren Tangenten sich in X, dem Pole von GH schneiden. Der Äquator AB gehöre zur Einteilung, ebenso der beliebige Kreis DC, der so liegen muſs, daſs die Verlängerung von DC durch X geht. Ist dies nämlich der Fall, so treffen sich die Tangenten der Punkte D und C in einem Punkte Y der Verlängerung von GH. (Theorie von Pol und Polare.) Zieht man jetzt AY und BY, so findet man die Schnittpunkte E und F für einen neuen Kreis EF, wobei die Verlängerung von EF wieder durch X geht. Die symmetrisch unter AB liegenden Kreise geben bei Verbindung der Endpunkte der sie darstellenden Linie mit Y neue Teilpunkte, so daſs man, wie bei Figur 106, beliebig viele Kreise der Einteilung erhalten kann.

Wie diese Kreise als Ellipsen in den Grundriſs zu übertragen sind, ist nach dem Früheren bereits bekannt.

Im Grundriſs liegt der Büschelpunkt H_1 auf der Verlängerung von GH und auf dem horizontalen Durchmesser SR, der zur Teilung gehören mag. Während nun die Büschelkreise in Wirklichkeit unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, ist dies in der Zeichnung nicht der Fall, nur der Kreis TQ schneidet zugleich in der Wirklichkeit und in der Zeichnung den Kreis SR rechtwinklig, da die Tangenten in Q und T sich auf der Polaren in Z treffen. RQ verlängert giebt auf der Linie XZ den Schnittpunkt M. Die Tangenten von M aus geben Berührungspunkte X_1 und Y_1 so, daſs X_1Y_1 ein zur Teilung gehöriger Büschelkreis ist, dessen symmetrischer Kreis X_2Y_2 ebenfalls zur Teilung gehört. RX_1 verlängert giebt N auf der Geraden

Digitized by Google

XZ, von wo aus wieder Tangente zu legen sind, die $V_1 W_1$ geben u. s. w.

Die so gefundenen „Meridiankreise“ sind als Ellipsen nach bekannter Methode in den Aufriſs zu übertragen.

Bemerkung: Auch hier lassen sich die „Loxodromen“ in das Rechtecksnetz eintragen.

An Figur 108 ist noch zu bemerken, daſs die durch Symmetrie gefundene Linie $X_2 Y_2$ durch M geht. Bei N findet ähnliches statt, so daſs die Konstruktionen sich abkürzen lassen. — Das so gefundene Rechtecknetz ist von Bedeutung für die mathematische Physik. Leitet man z. B. in eine aus dünnem Blech gefertigte Kugel bei H einen elektrischen Strom ein, bei G aus, so wandert die Elektrizität auf den Büschelkreisen. Die Kreise der Orthogonalschar dagegen sind Kurven gleicher elektrischer Spannung.

Ähnlich ist es, wenn G und H auf verschiedenen konstanten Temperaturen gehalten wurden. Die Wärme wandert dann auf den Büschelkreisen, und die orthogonalen Kreise sind Isothermen.]

§ 18.

Die Kugel in schräger Parallel-Perspektive.

Scheint die Sonne auf eine Kugel, so ist der hinter ihr schwebende Schatten ein Kreiscylinder, der von jeder beliebigen Ebene in einer Ellipse geschnitten wird. In Figur 109 ist der Vorgang dieser Parallelprojektion im Aufriſs dargestellt. AB wird die lange Axe der Ellipse, ihre kurze Axe wird gleich dem Kugeldurchmesser.

Nach Figur 59 berührt aber die Kugel in einem Brennpunkte E der Ellipse, so daſs, wie leicht zu zeigen, auch der Punkt C des Durchmessers EC nach dem Brennpunkte F projiziert wird. Folglich:

Bei jeder Schrägprojektion der Kugel erscheint dieselbe als Ellipse, die Endpunkte des Durchmessers aber, der senkrecht zur Projektionsebene steht, werden nach den Brennpunkten der Ellipse projiziert, der Kugelmittelpunkt endlich nach dem Mittelpunkte der Ellipse.

Aufgabe 122. Ein regelmäſsiges Axenkreuz sei in Parallelperspektive gegeben, und zwar in der Lage, daſs die eine Axe senkrecht gegen die Bildfläche zu denken ist. Die durch dieses Kreuz bestimmte Kugel soll gezeichnet werden.

Aufl. XY, VW, EF in Figur 110 seien die drei Axen, von denen EF senkrecht gegen die Ebene der Zeichnung gedacht ist. Man schlage mit MX um M einen Kreis und ziehe den Durchmesser

Digitized by Google

LN senkrecht zu EF. Nach vorigem Satze sind E und F die Brennpunkte, LN die kleine Axe der Ellipse, als welche die Kugel erscheint. Macht man also MA und MB gleich LE, so ist AB die grofse Axe der Ellipse, die nun leicht fertig zu zeichnen ist.

Bemerkung: In Figur 110 sind gleichzeitig die drei Hauptkreise des Axenkreuzes mit eingezeichnet.

Man beachte, wo die Hauptkreise auf die Rückseite treten. Der als Kreis erscheinende verschwindet bei L und N, die anderen da, wo die Tangenten der Ellipse horizontal oder vertikal sind. Der höchste Punkt W der Kugel erscheint innerhalb der Ellipse auf der sichtbaren Kugelhälfte, der in Wirklichkeit tiefste Punkt V ist gleichfalls ins Innere der Ellipse gerückt, liegt jedoch auf der unsichtbaren Kugelhälfte. Die äufsersten Punkte X und Y (links und rechts) sind gleichfalls ins Innere gerückt, und nur Y ist sichtbar.

Bemerkung: Die häufigere, aber umständlichere Konstruktion ist folgende. Man überträgt eine Reihe von Parallelkreisen, wie sie in Figur 104 oder 106 gezeichnet sind, in Parallelperspektive und zeichnet dann die umhüllende Kurve nur mit Annäherung. Die Zeichnung wird daher auch weniger exakt.

Aufgabe 123. Den Globus mit dem Gradnetz (Figur 104) in Parallelperspektive zu übertragen.

Aufgabe 124. Den Globus mit der „konformen Rechteckteilung" (Figur 106) in Parallelperspektive zu zeichnen.

Aufgabe 125. Die Durchdringung Figur 105 in Parallelperspektive zu zeichnen.

Bemerkung: Die drei letzten Aufgaben sind zwar instruktiv, aber aus schon angedeuteten Gründen nicht besonders dankbar. Dasselbe gilt von den parallelperspektivischen Zeichnungen der regelmäfsigen Körper mit ihren ein- und umbeschriebenen Kugeln, da die letzteren als Ellipsen zu konstruieren sind.

§ 19.

Der Ringkörper mit Kreisquerschnitt (Rotationscyklide oder Torus.)

Es handelt sich in diesem Abschnitt um denjenigen Ringkörper, der durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, ihn selbst nicht schneidende Axe entsteht. Derselbe wird in der Mathematik als Rotationscyklide (auch als Torus) bezeichnet. Er hat senkrecht zur Axe Kreisschnitte, ebenso schneiden alle ebenen Schnitte, in denen die Axe liegt, den Körper in Kreisen. Die ersteren heifsen

Digitized by Google

Parallelkreise, die letzteren Meridiankreise. Der gröfste der Parallelkreise kann als äufserer Äquator, der kleinste als innerer Äquator bezeichnet werden. Dafs der Körper auch andere Kreisschnitte hat, wird sich später zeigen.

Aufgabe 126. Den Ringkörper in Grund- und Aufrifs mit einigen Parallel- und Meridiankreisen zu zeichnen und eine der Drehungen vorzunehmen.

Aufl. In Figur 111 ist der Körper zunächst in einfachster Lage dargestellt. Von den Parallelkreisen sind gewählt die beiden Äquatoren und die im Aufrifs als obere resp. untere Grenzlinie erscheinenden Kreise. Durch Meridiane ist die Oberfläche in acht kongruente Teile eingeteilt. Die Meridianellipsen im Aufrifs werden bequem mit Hilfe ihrer umbeschriebenen Rechtecke konstruiert. Bei der Drehung machen die Kreisschnitte ebenfalls keine Schwierigkeit, wohl aber die äufsere und innere Umrandung, die keine Ellipsen sind, sondern „Parallelkurven" oder besser „äquidistante Kurven" der Ellipse. Die dritte Figur im Grundrifs giebt die Konstruktion an: Zunächst ist die Mittellinie des Ringkörpers gezeichnet, d. h. die Kurve, in der die Mittelpunkte aller Meridiankreise liegen. Um zahlreiche Punkte dieser als Ellipse erscheinenden Linie sind mit dem Radius des Meridiankreises Bogen geschlagen, durch welche beide Kurven ausschattiert werden. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt daraus, dafs die dem Inneren des Ringes einbeschriebenen Kugeln in allen Lagen als solche erscheinen. Die geschlagenen Bogen sind ihre Konturen.

Bemerkung: Dafs die Kurven, die von einer gegebenen Ellipse überall gleichen Abstand haben (also die Parallelkurven), keine Ellipsen sind, erkennt man sehr leicht an den inneren Parallelkurven, die zum Teil sehr komplizierte Gestalten haben und sogenannte Rückkehrpunkte besitzen. Ihre Konstruktion ist eine instruktive Übung.

Aufgabe 127. Ein Kreisring hängt in einem andern, ihm kongruenten, so, dafs ihre Äquatorial-Ebenen senkrecht aufeinander stehen. Beide sollen in beliebiger Lage gezeichnet werden.

Bemerkung: In Figur 112 ist die Aufgabe unter Benutzung der vorigen gelöst. Nach den letzten Bemerkungen ist es nicht mehr nötig, mit der einfachsten Lage zu beginnen.

[**Aufgabe 128.** Die Fläche der Rotationscyklide soll durch Parallel- und Meridiankreise in ein Netz ähnlicher Rechtecke eingeteilt werden.

Digitized by Google

Aufl. Die Konstruktion der Meridiane, die im Grundrifs als Gerade, im Aufrifs als Ellipsen erscheinen, macht keine Schwierigkeiten. Beliebig viele Punkte der genannten Ellipsen erhält man mit Hilfe der Parallelkreise. — Sollen, wie in Figur 113, der innere und äufsere Äquator zur Teilung gehören, so findet man die übrigen Parallelkreise folgendermafsen: Man ziehe die Tangente ME, ziehe AE bis zum Schnitte N mit der Axe und von N aus die Tangente NG, ziehe sodann AG bis O und die Tangente OJ, ziehe AJ bis zum Schnitte V mit der Axe und die Tangente VC. Jetzt giebt CO den Schnitt P, C_1O giebt auf dem Kreise R, J_1O giebt S, P_1O giebt T, G_1O den Punkt E; C_1N, J_1N, P_1N, G_1N, und endlich CM, JM und PM geben den Rest der Einteilung des Kreises in 32 korrespondierende Teile, denn das unten liegende ist symmetrisch zum oberen.

Durch die gefundenen Punkte sind im Aufrifs die Parallelkreise als horizontale Gerade zu legen. Durch Hinabprojektion in den Grundrifs erhält man die Radien für die dort zu zeichnenden konzentrischen Kreise.

Projiziert man die Schnittpunkte aus dem Grund- in den Aufrifs, so findet man die Punkte, durch welche die Meridianellipsen gehen.

Bemerkung: Der Beweis für die Ähnlichkeit der gefundenen „Rechtecke“ ergiebt sich durch dieselbe Betrachtung, wie bei der Kugeleinteilung.

In Figur 113 stehen zufälliger Weise die Tangenten ME und MF aufeinander senkrecht. Daher kommt es, dafs dort die Einteilung in 32 Parallelstreifen und in 32 Meridianstreifen ganz von selbst „Quadrate“ ergeben hat. In diesem Spezialfalle geht AE nach einem Punkte N der obersten Horizontalen. Letztere gehört daher mit zur Einteilung, was sonst nicht immer der Fall ist.]

[**Aufgabe 129.** In die vorige Rechtecksteilung die Diagonalkurven einzuzeichnen.

Aufl. einfach. In Figur 113 ist sie mit durchgeführt. Die Diagonalkurven der Quadratteilung werden in diesem Spezialfalle in der Wirklichkeit Kreise, die wiederum eine Quadratteilung geben. Sowohl im Grundrifs, als auch im Aufrifs der Figur, sind also die Diagonalkurven Ellipsen, und zwar berühren die des Grundrisses die beiden Kreise. M_1 ist ein gemeinschaftlicher Brennpunkt der Grundrifsellipsen.

Im allgemeinen Falle giebt die angewandte Konstruktion eine Rechtecksteilung, deren Diagonalkurven, sobald sie die durch die inneren Tangenten ME und MF angegebene Neigung haben, wieder

Digitized by Google

Kreise sind, die jedoch nicht ein quadratisches, sondern ein rhombisches Netz bilden.

Für Mathematiker sei bemerkt, dafs so die Fläche jeder Rotationscyklide konform auf ein Rechteck übertragen werden kann, dessen Diagonalen denselben Winkel bilden, wie die Diagonalen ME und MF. Die Cylinderfläche eignet sich also sehr gut zur Darstellung der elliptischen Funktionen.]

Aufgabe 130. Mit der im Grundrifs vervollständigten Figur 113 eine Drehung vorzunehmen.

Aufgabe 131. Figur 113 in schräge Parallelperspektive umzusetzen.

§ 20.

Die allgemeinere Cyklide.

[**Aufgabe 132.** Im Grundrifs der Figur 114 sind zwei exzentrische Kreise mit den Mittelpunkten N_1 und N_2 gezeichnet. Es lassen sich unzählige Kreise konstruieren, die jene beiden berühren. Jeder dieser Kreise erzeugt durch Rotation um einen beliebigen seiner Durchmesser eine Kugel. Die umhüllende Fläche dieser sämtlichen Kugeln ist eine allgemeine Cyklide. Dieselbe soll im Grund- und Aufrifs gezeichnet und durch Kreisschnitte in ein Netz ähnlicher Rechtecke eingeteilt werden.

Aufl. Mit Hilfe der Berührungskreise M_1 und M_2, die nach oben zu übertragen sind, erhält man das Wichtigste für den Aufrifs, denn die gemeinschaftlichen Tangenten, die sich im äufseren Ähnlichkeitspunkte A schneiden, geben die restierende Begrenzung des Körpers. Derselbe hat nämlich, wie der des vorigen Abschnitts, vier Scharen von Kreisschnitten, was daraus folgt, dafs er aus einer Rotationscyklide durch reziproke Radii vectores entsteht. Die eine Schar von Kreisschnitten erscheint im Aufrifs als eine Gruppe von Geraden durch A, die andere im Grundrifs als eine Gruppe von Geraden durch den inneren Ähnlichkeitspunkt J_1 der Kreise N_1 und N_2. Dabei ist zu bemerken, dafs AA_1 die Potenzlinie der Kreise N_1 und N_2 ist, dagegen GJ_1 die der Kreise M_1 und M_2.

Die Einteilung im Aufrifs geschieht wie im vorigen Abschnitt. Sollen dort BC und DE zur Teilung gehören, so lege man in D und E Tangenten an die Kreise M_1 und M_2, die sich in einem Punkte X der Potenzlinie GJ_1 treffen. Zieht man dann XC, so giebt dies einen Teilpunkt J, durch den die Gerade HJ zu legen ist, die auch durch A geht. So fährt man fort wie in § 19.

Digitized by Google

Im Grundrifs ist's ähnlich. Sollen KL und OP zur Teilung gehören, so ziehe man die Tangente A_1R, worauf RJ_1 zur Teilung gehört. PR schneidet die Potenzlinie AA_1 in S. Die Tangente ST giebt den Teilpunkt T und die Teillinie TJ_1 u. s. w.

Die als Gerade erscheinenden Kreisschnitte des Grundrisses erscheinen im Aufrifs als leicht zu konstruierende Ellipsen. Die Geraden im Aufrifs erscheinen im Grundrifs ebenfalls als Ellipsen.

Die Rechteckteilung ist also leicht zu vollenden.

Aufgabe 133. Nach Vollendung des Rechtecksnetzes die Diagonalkurven einzuzeichnen, die im speziellen Falle eine rhombische oder quadratische Einteilung der Oberfläche geben.

Bemerkung: Auch hier giebt es, wie schon angedeutet, noch zwei Scharen schräger Kreisschnitte, die eine rhombische Einteilung der Oberfläche veranlassen.]

[Die Cykliden anderer Form sind in entsprechender Weise vom Verfasser in Jahrgang XIV (1883) der Zeitschrift für math. u. naturwissenschaftlichen Unterricht behandelt worden. Bei einigen läfst sich die quadratische Einteilung leichter, als hier behandeln.]

§ 21.

Einige Aufgaben über den geraden Kreiskegel.

Der nächste Abschnitt macht die Einschaltung einiger Aufgaben über den geraden Kreiskegel nötig.

Aufgabe 134. In Figur 115 ist ein gerader Kreiskegel dargestellt, der durch die Ebene AB schräg geschnitten wird. Durch den Halbierungspunkt M von AB ist der Kreisschnitt DE ($\perp$ zu HC) gelegt. Es soll bewiesen werden, dafs BE gleich der linearen Exzentrizität der Ellipse AB sei.

Beweis. Der Berührungspunkt F des dem $\triangle ABC$ einbeschriebenen Kreises ist der eine Brennpunkt der Ellipse, $AF_1 = BF$ giebt den andern F_1, also ist $MF = MF_1$ die lineare Exzentrizität e. Zieht man $BK \parallel DC$, so ist

$$BE = BK = AD = y.$$

Setzt man noch

$$BF = BG = AF_1 = t,$$

so ist

$$DJ = EG = y + t,$$

also

$$AJ = 2y + t.$$

Digitized by Google

Da nun $AF = 2e + t$ und $AJ = AF$ ist, so folgt auch

$$2y + t = 2e + t,$$

also $y = e$.

Bemerkung: Ist für zwei Ellipsen $\frac{e}{a}$ dasselbe, d. h. ist das Verhältnis der linearen Exzentrizität zur grofsen Halbaxe für beide gleich, so ist auch $\frac{a}{b}$, das Verhältnis der Halbaxen für beide Ellipsen, dasselbe. Dies folgt daraus, dafs dann die aus a, e und b gebildeten rechtwinkligen Dreiecke ähnlich sind.

Aufgabe 135. In einen aufrecht stehenden geraden Kreiskegel eine Ellipse mit den Halbaxen a und b so einzulegen, dafs die kleinere Axe horizontal liegt und als Punkt erscheint, während man die gröfsere in ihrer ganzen Länge sieht.

Aufl. In Figur 116 sei RL ein beliebiger Horizontalschnitt des Kegels RLC. Mit Hilfe der gegebenen Gröfsen a und b konstruiere man $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, d. h. man zeichne e als Kathete eines in der Figur nicht vorhandenen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse a und der Kathete b. Sodann mache man $LN = e$ und schlage um N einen Kreisbogen mit a, der RL in O schneidet. Man ziehe NO und verlängere es um sich selbst bis P. Zieht man jetzt durch P eine Parallele zu LC bis zum Schnitte A, und zieht man AB parallel zu PN, so ist der Schnitt AB der gegebenen Ellipse kongruent, die Aufgabe also gelöst.

Beweis. Legt man durch den Halbierungspunkt M von AB den Kreisschnitt DE, so ist

$$\triangle MEB \cong OLN,$$

also $BE = e$. Nach voriger Figur hat also die Ellipse AB das richtige a und e, also auch das richtige b.

Bemerkung: Daraus folgt, dafs sich jede beliebige Ellipse in der verlangten Weise in ein und denselben Kreiskegel legen läfst. Jeder Schnittrichtung entspricht dasselbe Axenverhältnis. Parallele Schnitte geben also ähnliche Ellipsen.

Aufgabe 136. Die entsprechenden Aufgaben sollen für die Hyperbel, ebenso für die Parabel gelöst werden.

Bemerkung: Damit wird der Beweis dafür geführt, dafs jeder beliebige Kegelschnitt in ein und denselben geraden Kreiskegel in der verlangten Weise eingelegt, also als Schnitt desselben betrachtet werden kann.

Digitized by Google

§ 22.

Der gerade elliptische Kegel und Cylinder.

Aufgabe 137. Den geraden elliptischen Kegel in verschiedenen Lagen zu zeichnen, wenn die Axen der Ellipse und die Höhe des Kegels gegeben sind.

Bemerkung: In Figur 117, die sich selbst erläutert, ist der Kegel in einfachster Lage dargestellt. Die allgemeineren Lagen erhält man durch die Methode der Drehungen.

Aufgabe 138. Denselben Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene abzustumpfen.

Aufl. 1. Methode: In derselben Figur sei E_1F_1 im Aufriſs die Abstumpfungsebene.

Zieht man beliebig P_1K_1, sodann vertikal K_1K_2K, darauf im Grundriſs PK und PK_2, und endlich vertikal J_1J_2J, so sind J_2 und J im Grundriſs die Punkte der gesuchten Schnittlinie, welche J_1 entsprechen. Solcher Punkte kann man auf dieselbe Art beliebig viele konstruieren.

2. Methode: Der abgeschnittene Teil des Körpers ist dem ganzen Körper ähnlich, also ist die Schnittfläche der Basis ähnlich. Zieht man also E_1E und F_1F vertikal, sodann $EG \parallel AD$, so ist PG die kleine Halbaxe der gesuchten Ellipse, während PE die gröſsere Halbaxe ist. Die Ellipse läſst sich also auf verschiedene Arten vollenden, z. B. so:

Man ziehe PK und CK, sodann $HJ \parallel CK$, dann ist J ein Punkt der Ellipse.

Aufgabe 139. Denselben Kegel durch einen Schrägschnitt unsymmetrisch abzustumpfen.

Aufl. Man drehe den Grundriſs in eine beliebige Lage und zeichne einen als Gerade erscheinenden Schrägschnitt in den Aufriſs, was der geforderten Allgemeinheit entspricht. Darauf wende man die 1. Methode der vorigen Aufgabe an.

Aufgabe 140. In einen geraden elliptischen Kegel von der Höhe h und dem Axenverhältnis $a:b$ einen Kreisschnitt einzulegen.

Aufl. In Figur 118 ist der Kegel im Grund- und Aufriſs zunächst so gezeichnet, daſs die kleine Axe $2b$ im Grundriſs horizontal liegt. Man schlage um B mit $CE = a$ einen Kreis, der die Brennpunkte F und F_1 giebt, so daſs $CF = e$ wird (Exzentrizität). Im Aufriſs mache man jetzt $B_1K_1 = e$, schlage um K_1 mit a einen

Digitized by Google

Bogen, der die Basis in L_1 schneidet, dann ist K_1L_1, bis N_1 verlängert, die als Gerade erscheinende Ebene eines Kreisschnittes. Alle anderen Kreisschnitte sind diesem parallel, oder parallel zur symmetrischen Ebene X_1Y_1.

Beweis. Man nehme den einbeschriebenen Kreis der Grundrifsellipse zu Hilfe. Dann stellt der Aufrifs zugleich einen geraden Kreiskegel dar. In diesem letzteren ist K_1N_1 die Richtung für die Ellipsenschnitte mit demselben Axenverhältnis $a:b$, wie die Grundrifsellipse. (Vgl. vorigen §.) Nun giebt aber der Schnitt K_1N_1 im elliptischen Kegel eine Kurve, deren Horizontal-Dimensionen, wie aus dem Grundrifs hervorgeht, an jeder Stelle das $\frac{a}{b}$-fache von den entsprechenden Horizontal-Dimensionen des Kreiskegelschnittes sind. Das Axenverhältnis für den Schnitt K_1N_1 des elliptischen Kegels wird also $a:\frac{b\,.\,a}{b}$ oder $a:a$, d. h. beide werden gleich, der Schnitt also ein Kreisschnitt.

Folgerung: Jeder elliptische Kegel läfst sich auf zwei Arten als schiefer Kreiskegel betrachten. Die beiden Kreisschnittrichtungen liegen symmetrisch zur Höhe des Kegels. Da sich in den bei Figur 118 zu Hilfe genommenen geraden Kreiskegel jeder Kegelschnitt einlegen läfst, so gilt dies auch vom geraden elliptischen Kegel. Letzterer liefert demnach auch keine anderen Kegelschnitte, als die schon bekannten.

Bemerkung: Der Satz von den beiden Kreisschnitten wird bei der Zentralprojektion Anwendung finden. Den Schnitt X_1Y_1 nennt man den Gegenschnitt von K_1N_1.

Aufgabe 141. Der gerade elliptische Kegel in Figur 119 werde durch die im Grundrifs als XY erscheinende Vertikalebene geschnitten. Der entsprechende hyperbolische Schnitt soll im Aufrifs gezeichnet werden.

Aufl. Man ziehe beliebig P_1E_1, darauf die Vertikale E_1E und die Grundrifslinie EM. Projiziert man den Schnittpunkt F vertikal nach F_1, so ist F_1 ein Punkt der Schnittkurve. Solcher kann man auf dieselbe Weise beliebig viele konstruieren. — Für den höchsten Punkt Z_1 pafst diese Konstruktion nicht. Um diesen zu finden, ziehe man $ZV \parallel CB$, projiziere V nach V_1 und ziehe V_1W_1 horizontal, wodurch man Z_1 erhält. Der zweite Arm der Hyperbel liegt in der Fortsetzung des Kegels über die Spitze hinaus und erscheint kongruent.

Aufgabe 142. Den geraden elliptischen Cylinder in Grund-

Digitized by Google

rifs und Aufrifs zu zeichnen, durch schräge Schnittebenen abzustumpfen und die Schnittflächen in ihrer wirklichen Gestalt zu zeichnen.

Aufgabe 143. Die geeigneten Figuren dieses Abschnitts in Parallelperspektive zu übertragen.

§ 23.

Der gerade hyperbolische Kegel und Cylinder.

Aufgabe 144. Den geraden hyperbolischen Kegel in Grundrifs und Aufrifs zu zeichnen.

Bemerkung: In Figur 120 ist die Aufgabe gelöst, auch die elliptische Seitenansicht beigefügt, um den Körper zu veranschaulichen. Man hat sich in der Grundrifsebene die gezeichnete Hyperbel und in einer gegebenen Höhe über ihrem Mittelpunkte den Punkt M des Raumes zu denken, der durch Gerade mit allen Hyperbelpunkten verbunden wird. Die Asymptoten CM und DM im Grundrifs erscheinen im Aufrifs als die Horizontalen C_1M_1 und D_1M_1.

Die Seitenansicht hat an der Basis die Breite $J_2H_2 = JH$, in der Höhe h die Breite $C_2F_2 = CF$. Um die Breite an anderen Stellen zu finden, ziehe man im Grundrifs die beliebige Gerade MXY und die symmetrisch liegende MX_1Y_1. Projiziert man X oder X_1 nach oben, so findet man X_2 und das symmetrisch liegende X_3, so dafs M_1X_3 und M_1X_2 der Geraden MX (bezw. MX_1) entsprechen, dafs ferner Y_2 den Punkten Y und Y_1 entspricht. In der Höhe von Y_2 hat also die Seitenansicht die Breite $Y_3Y_4 = YY_1$, und so kann man die Breiten in allen Höhen konstruieren.

Der Beweis, dafs die Seitenansicht eine Ellipse ist, soll hier nicht geführt, nur darauf aufmerksam gemacht werden, dafs Figuren, wie 120, nichts anderes sind, als Figuren, wie 119 in anderer Lage.

Jeder gerade hyperbolische Kegel läfst sich als gerader elliptischer — im speziellen Falle als gerader Kreiskegel — betrachten. Neue Eigenschaften sind also hier nicht zu erwarten.

Aufgabe 145. Den geraden hyperbolischen Cylinder in Grund- und Aufrifs für verschiedene Lagen zu zeichnen.

Aufgabe 146. Beide Körper in Parallelperspektive darzustellen.

Aufgabe 147. In den geraden hyperbolischen Kegel einen Kreisschnitt einzulegen.

Bemerkung: Da man ihn als elliptischen Kegel betrachten

Digitized by Google

kann, ist die Aufgabe bereits im vorigen Abschnitte gelöst. Da sich aber Kreisschnitte einlegen lassen, so läfst sich auch jeder gerade hyperbolische Kegel als schiefer Kreiskegel betrachten.

§ 24.

Parabolischer Kegel und Cylinder.

Da die Parabel keinen Mittelpunkt hat, so giebt es keinen geraden parabolischen Kegel, sondern nur schiefe. Dagegen giebt es gerade parabolische Cylinder, die zur Veranschaulichung der axialen Trägheitsmomente ebener Flächen dienen können.

Aufgabe 148. Einen parabolischen Kegel zu zeichnen, dessen Spitze in dem Lote liegt, welches sich im Scheitel der Parabel auf ihrer Ebene errichten läfst.

Bemerkung: Eine der Seiten des Kegels wird parallel zur Ebene der Parabel.

Aufgabe 149. Aus einem geraden Prisma mit rechteckiger Basis ist ein parabolischer Cylinder ausgeschnitten, der die eine Mittellinie der Basis berührt. Derselbe soll in Parallelperspektive gezeichnet werden.

Bemerkung: Figur 121 erläutert sich selbst. — [Der Restkörper hat, wie sich elementar beweisen läfst, als Inhalt den dritten Teil des Prismas. Soll er das axiale Trägheitsmoment des Basis-Rechtecks in Bezug auf die Mittellinie EF veranschaulichen, so ist, wenn $AB = h$, also $EB = \frac{h}{2}$ ist, $BG = \frac{h^2}{4}$ zu machen. Ist nun b die Länge von BC, so hat das Prisma den Inhalt $\frac{bh^3}{4}$, also der Restkörper den Inhalt $\frac{bh^3}{12}$. Dieselbe Formel stellt aber das besprochene axiale Trägheitsmoment dar.]

Aufgabe 150. Aus einem geraden Kreiscylinder ist in derselben Weise ein parabolischer Cylinder ausgeschnitten, der die Basis längs eines Durchmessers berührt. Der Restkörper soll in Parallelperspektive gezeichnet werden.

Aufl. In Figur 122 ist zunächst der Kreiscylinder in Parallelperspektive dargestellt. $ABCD$ ist der in der Zeichnungsebene liegende Hauptschnitt. In dieses Rechteck ist nach bekannter Methode die Parabel DMC eingezeichnet. Ist nun XY eine zum Durchmesser AB senkrechte Sehne des Basiskreises, und Z der Durchschnittspunkt, so ziehe man die Vertikale ZZ_1 bis zur Parabel, lege

Digitized by Google

durch Z_1 eine Parallele zu XY und mache X_1Z_1 und Y_1Z_1 jedes gleich XZ. Dann sind X_1 und Y_1 Punkte der Cylinderfläche, durch welche die gesuchte Schnittlinie geht. Solcher Punkte kann man auf gleiche Weise unendlich viele konstruieren.

[Die Figur ist eine Veranschaulichung des axialen Trägheitsmomentes einer Kreisfläche. Setzt man nämlich $AB = d$ und ist $BC = \frac{d^2}{4}$, so ist der Inhalt des Cylinders $\frac{\pi d^4}{16}$. Nun läfst sich elementar beweisen, dafs der Restkörper der vierte Teil des Cylinders ist. Sein Inhalt ist also $\frac{\pi d^4}{64}$. Dies ist zugleich der Ausdruck für das besprochene Trägheitsmoment.]

Aufgabe 151. Die Aufgaben dieses Abschnittes sollen in Grund- und Aufrifszeichnung für verschiedene Lagen gelöst werden.

Bemerkung: Jeder gerade Kegel resp. Cylinder mit Kegelschnittbasis wird durch schrägliegende Ebenen in Kegelschnitten geschnitten. In Bezug auf einen Schrägschnitt läfst sich dann das Gebilde als schrägen Kegel oder Cylinder betrachten. Die Annahme, dafs die schrägen Kegel und Cylinder ebene Schnitte haben, die stets wieder die früher behandelten Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln sind, ist eine naheliegende. Sie läfst sich in der That auf elementarem Wege als richtig beweisen.

§ 25.

Das Rotations-Ellipsoid, -Paraboloid und -Hyperboloid.

Es handelt sich in diesem Abschnitt um Körper, die durch Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Axen entstehen.

Aufgabe 152. Ein Rotationsellipsoid zu zeichnen, welches durch Umdrehung der Ellipse um die kurze Axe entstanden ist. Auf demselben sollen einige Meridianschnitte und Parallelkreisschnitte ausgeführt, und schliefslich soll mit dem Aufrifs eine Drehung vorgenommen werden.

Bemerkung: In Figur 123 ist die Aufgabe gelöst. Die Methode ist dieselbe, wie bei dem Gradnetz der Kugel. Im Grundrifs sind die Meridiane $22\frac{1}{2}^0$, 45^0, $67\frac{1}{2}^0$ gewählt, im Aufrifs sind willkürlich diejenigen Parallelkreise genommen, welche senkrecht über C, D und E endigen. Die Drehung des Körpers ist leicht durchzuführen. Die

Digitized by Google

dabei auftretende Umhüllungskurve ist eine Ellipse. Die Figur ist wichtig in ihrer Anwendung auf die Gestalt rotierender Himmelskörper, z. B. der abgeplatteten Erde. [Auf Einteilung in „ähnliche Rechtecke" mufs hier verzichtet werden, da höhere Rechnungen dazu erforderlich sind.]

Aufgabe 153. Dasselbe für Rotation der Ellipse um die lange Axe durchzuführen.

Aufgabe 154. Das Rotationsparaboloid in Grund- und Aufrifs zu zeichnen und in verschiedene Lagen zu bringen.

Bemerkung: Die Auflösung geschieht ebenso, wie vorher. Die Meridianschnitte sind Parabeln und erscheinen im Aufrifs als solche. Auch in Figur 124 ist auf Einteilung in ähnliche Rechtecke verzichtet worden. Die Zeichnung stellt zugleich einen Cylinder $ABCD$ dar, in dem sich das Paraboloid befindet. [Der Inhalt desselben wird durch das Paraboloid halbiert. Ist also der Durchmesser des Grundkreises d, die Höhe $\frac{d^2}{4}$, so ist der Cylinderinhalt $\frac{\pi d^4}{16}$, der Inhalt des Paraboloids also $\frac{\pi d^4}{32}$, ebenso grofs der des Restkörpers. Ebenso grofs ist aber auch das polare Trägheitsmoment eines Kreises. Dasselbe ist also durch den Restkörper graphisch dargestellt. Es ist doppelt so grofs, wie das vorher besprochene axiale Trägheitsmoment. Die Figur stellt auch die Form einer Wassermasse dar, die mit dem cylindrischen Gefäfse um dessen Axe rotiert und unter der Einwirkung der Zentrifugalkraft am Rande aufsteigt, in der Mitte dagegen einsinkt.]

Aufgabe 155. Ein Gefäfs habe die Gestalt eines geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche. Es rotiere mit der in ihm enthaltenen Flüssigkeit so schnell um seine Axe, dafs der entstehende parabolische Trichter den Boden berührt. Die Flüssigkeitsgestalt soll gezeichnet werden. — Oder: Aus einer quadratischen Säule soll ein Rotationsparaboloid ausgeschnitten werden, welches den Boden berührt und durch die oberen Eckpunkte der Säule geht.

Aufl. In Figur 125 ist zunächst die Säule über Eck in Grund- und Aufrifs gezeichnet, so dafs die eine Diagonalparabel $F_1M_1C_1$ leicht zu konstruieren ist. Die andere erscheint als die Gerade N_1M_1. Da nun im Grundrifs

$$MA = r, \quad MB = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist, so mufs (nach dem Gesetz der Parabel) sich im Aufrifs verhalten

Digitized by Google

$$B_1 D_1 : A_1 C_1 = r^2 \tfrac{1}{2} : r^2 = \tfrac{1}{2} : 1 ,$$

d. h. $B_1 D_1$ ist halb so groſs, wie $A_1 C_1$, so daſs auch die parabolischen Schnitte $F_1 E_1 N_1$ und $N_1 D_1 C_1$ leicht zu zeichnen sind. — Eine oder mehrere Drehungen lassen den Körper plastischer erscheinen.

[Bemerkung: Durch den Restkörper ist das polare Trägheitsmoment des Quadrats dargestellt. Ist z. B. die Quadratseite $= b$, also $r = b\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist

$$A_1 C_1 = r^2 = \frac{b^2}{2}$$

zu setzen. Nach dem Satze über die Summe zweier gewisser axialer Trägheitsmomente

$$J_1 + J_2 = J_p$$

wird hier das polare Moment J_p doppelt so groſs, als das frühere axiale. Letzteres war

$$\frac{b h^3}{12} = \frac{b^4}{12}.$$

Hier also erhält man $\frac{b^4}{6}$ als Inhalt des Restkörpers und als Wert des Trägheitsmoments.]

Aufgabe 156. Ein gerader Kreiscylinder werde dadurch veranschaulicht, daſs man zwei gleiche konzentrische Drahtkreise in die geeignete Lage bringt und sie durch parallele Fäden, die in gleichem Abstande aufeinander folgen, miteinander verbindet, so daſs also die Fäden, wie in Figur 126a, den Cylindermantel darstellen. Wird jetzt der untere Kreis um die Cylinderaxe gedreht, so daſs die Fäden schräge Lage annehmen, so schnürt sich der Körper in der Mitte ein. Denkt man sich alle möglichen Fäden vorhanden, so daſs eine stetige Fläche entsteht, so läſst sich zeigen, daſs diese ein Rotationshyperboloid ist. Dasselbe soll nach dieser Auffassung gezeichnet werden.

Aufl. In Figur 126a ist zunächst die Cylinderteilung regelrecht durchgeführt. Darauf ist die Verdrehung des unteren Kreises um einen gewissen Winkel erfolgt, der kleiner als 180^0 sein muſs, da 180^0 den Kegel geben würde. Die Fäden liegen nun, wie in Figur 126b, schräg und schattieren eine Kurve aus, von der sich beweisen läſst, daſs sie eine Hyperbel ist. Für diese sind die durch M gehenden Fäden die Asymptoten. Dies geschieht im Aufriſs, während im Grundriſs ein Kreis ausschattiert wird.

Bemerkung: Der gesamte Körper stellt ein Rotationshyperbo-

Digitized by Google

loid dar, welches, wie aus der Figur hervorgeht, stets zwei Scharen gerader Linien auf seiner Oberfläche hat. Die Technik hat diese Eigenschaft bei den sogenannten Hyperbelrädern benutzt, durch welche die Bewegung von einer Axe auf eine andere, die ihr nicht parallel ist und sie nicht schneidet, direkt übertragen wird.

Aufgabe 157. Es soll bewiesen werden, dafs die ebenen Schrägschnitte des Rotationshyperboloids Kegelschnitte sind.

Aufl. *a*) In Figur 127 ist das Rotationshyperboloid in gerader Parallelperspektive dargestellt (aus Gründen der Einfachheit nicht ganz korrekt). Die Ebene KL sei die zu untersuchende Schnittfläche. Von den Kugeln, die sich als Berührungskugeln in den Innenraum einsenken lassen, berühren zwei die Ebene in F und F_1, das Hyperboloid dagegen in den Kreisen ABC und DEG. Durch den beliebigen Punkt X der Schnittkurve denke man sich eine der vorher besprochenen Geraden gelegt; sie sei BE. Aufserdem ziehe man XF und XF_1. Von diesen Linien sind BX und F_1X als Tangenten von X an die obere Kugel einander gleich, ebenso EX und FX als Tangenten an die untere. Folglich ist

$$FX + F_1X = EX + XB = EB.$$

Alle möglichen Geraden BE sind aber einander gleich, folglich ist auch die Summe $FX + F_1X$ stets dieselbe Gröfse, d. h. die Schnittkurve ist eine Ellipse.

b) In derselben Weise wird für Ebenen, welche z. B. nur einen der in der Figur 127 gezeichneten Hyperbelarme treffen, bewiesen, dafs die Schnittkurve eine Hyperbel ist. Man vergleiche dazu den bei dem Hyperbelschnitt des Kegels angewandten Weg.

c) Der Beweis für Ebenen, welche alle einzusenkenden Kugeln schneiden, ist schwieriger. Bei ihnen fallen die Brennpunkte der Schnittkurve in den Aufsenraum.

Aufgabe 158. Das einmantelige Rotationshyperboloid soll in Grund- und Aufrifs gezeichnet und mit einigen Parallelkreisen und Meridianschnitten versehen werden.

Aufl. In Figur 128 sind im Aufrifs willkürliche Horizontalschnitte C_1D_1, E_1F_1 und G_1H_1, letzterer durch das Zentrum M_1 gelegt. Dies giebt im Grundrifs die Parallelkreise mit den Durchmessern CD, EF, GH. Zieht man im Grundrifs einen beliebigen Durchmesser VZ, der einen Meridian darstellt, z. B. den unter 45^0 geneigten, so giebt dieser die Schnittpunkte V, W, X, Y, die vertikal nach oben zu projizieren sind und auf den entsprechenden

Digitized by Google

Horizontalen die Punkte V_1, W_1, X_1, Y_1 geben. So findet man beliebig viele Punkte des Meridians im Aufrifs, der als Hyperbel erscheinen mufs, weil er die Parallelprojektion einer Hyperbel ist.

Aufgabe 159. Durch Rotation der Hyperbel um die schneidende Axe entsteht das zweimantelige Rotationshyperboloid. Dasselbe soll in derselben Weise gezeichnet werden.

Bemerkung: Figur 129 erläutert sich selbst.

Aufgabe 160. Die Aufgaben dieses Abschnitts in schräger Parallelperspektive zu lösen.

§ 26.

Die noch übrigen Kegelschnittsflächen.

Aufgabe 161. Das dreiaxige Ellipsoid zu zeichnen und mit Meridianschnitten und Parallelkreisen zu versehen.

Aufl. Das dreiaxige Ellipsoid entsteht z. B. dadurch, dafs man bei dem Rotationsellipsoid alle Sehnen, die senkrecht zur Ebene eines Meridianschnittes stehen, in demselben Verhältnis verlängert oder verkürzt. So stellt Figur 130 mit dem Kreise im Grundrifs zunächst ein Rotationsellipsoid dar. Die Durchmesser G_1H_1 und K_1L_1 im Grundrifs entsprechen den Meridianen DGC und DLC im Aufrifs. Jetzt sollen alle vertikalen Sehnen des Grundrifskreises in konstantem Verhältnis verkürzt werden, so dafs z. B. der Kreis $A_1K_1\,Y_1H_1B_1L_1X_1G_1$ sich in die Ellipse $A_1K_2F_1H_2B_1L_2E_1G_2$ verwandelt, der Durchmesser K_1L_1 natürlich in K_2L_2, ebenso G_1H_1 in G_2H_2. Die Parallelkreise PQ und RS im Aufrifs geben im Grundrifs Ellipsen, die der vorher konstruierten ähnlich sind. Die Zeichnung stellt jetzt den verlangten Körper dar.

Aufgabe 162. Das elliptische Hyperboloid mit einem Mantel in derselben Weise zu zeichnen.

Aufl. Man verwandele den Grundrifs der Figur 128 durch proportionale Verkürzung aller Vertikalen ganz ebenso, wie vorher. Die Geraden auf der Oberfläche des Rotationshyperboloids bleiben auch hier Gerade.

Aufgabe 163. Das elliptische Hyperboloid mit zwei Mänteln in derselben Weise zu zeichnen.

Aufl. Dieselbe Veränderung ist am Grundrifs der Figur 129 vorzunehmen.

Aufgabe 164. Das elliptische Paraboloid zu zeichnen.

Digitized by Google

FRESNO UNIVERSITY CALIFORNIA

Aufl. Dieselbe Veränderung ist mit Figur 124 vorzunehmen.

[**Aufgabe 165.** Das hyperbolische Paraboloid in schräger Parallelperspektive zu zeichnen.

Aufl. In Figur 131 sei ABC eine beliebige Parabel in der Ebene der Zeichenfläche, BD ihre Axe, AC oder, was dasselbe ist, EF sei senkrecht zu BD. Durch EF denke man sich eine Ebene senkrecht gegen die Bildfläche gelegt, z. B. in Gestalt des Rechtecks $GKHJ$. Die Diagonalen desselben, GH und KJ, kann man als Asymptoten einer durch A und C gehenden Hyperbel betrachten, die nach den früheren Methoden, da sie als Hyperbel erscheint, leicht zu zeichnen ist.

Durch einen andern Punkt D_1 der Axe BD lege man jetzt $G_1H_1 \parallel GH$, $K_1J_1 \parallel KJ$, $E_1F_1 \parallel EF$. Letzteres giebt mit der Parabel ABC die Schnittpunkte A_1 und C_1, durch die sich eine neue Hyperbel mit den Asymptoten G_1H_1 und K_1J_1 legen läfst, die wegen des gleichen Asymptotenwinkels der vorigen ähnlich ist.

Legt man so durch alle Punkte der Parabel ähnliche und ähnlich liegende Hyperbeln in Ebenen, die den vorigen parallel sind, so bilden diese denjenigen Teil des gesuchten Körpers, der über der Ebene $G_2K_2H_2J_2$ liegt, die durch B geht und statt der Hyperbel die Geraden G_2H_2 und K_2J_2 enthält. Die Scheitel der Hyperbeln rücken nämlich immer mehr zusammen, bei B fallen sie vollständig zusammen, und so wird dort die Hyperbel durch zwei Gerade dargestellt.

Der Körper läfst sich aber nach unten fortsetzen, indem man z. B. durch D_3 und D_4 ebenfalls die Linien G_3H_3, K_3J_3, G_4H_4, K_4J_4 parallel zu den früheren legt. Es fragt sich nur, welche Hyperbeln jetzt in diese Asymptoten einzulegen sind.

Man kann folgendermafsen verfahren: Man lege durch B die Horizontale BZ, durch A die Vertikale AZ, durch Z die Gerade $XY \parallel GJ$, wobei X und Y auf G_2B und J_2B liegen. Durch die Punkte X, A und Y und durch die Axenrichtung AZ ist eine Parabel XAY bestimmt, die leicht in das Parallelogramm mit Seite XY und Mittellinie AZ eingezeichnet und nach unten verlängert werden kann. Zieht man jetzt z. B. die Horizontale D_3Z_3 bis zum Schnitte mit AZ, sodann VT bis zu den Schnittpunkten V und T mit der fortgesetzten Parabel, so ist V ein Punkt der Hyperbel mit den Asymptoten G_3H_3 und K_3J_3, die nun leicht zu vollenden ist.

Ebenso ist die unterste Hyperbel zu zeichnen. Um das Bild des Körpers zu vervollständigen, kann man durch D_3 die Linie

Digitized by Google

$PQ \parallel GJ$ bis zu den Schnitten mit der Hyperbel, P und Q, zeichnen. Dadurch erhält man die Elemente für eine Parabel $RPBQS$ mit der wirklichen Axe BD_4, die hier jedoch nicht als Axe erscheint.

In der Figur sind auch noch Parabeln gezeichnet, die zur Parabel ABC parallel liegen. Um die durch R gehende zu zeichnen, hätte man die Horizontale $\alpha\beta$ durch R von Asymptote zu Asymptote zu ziehen und die Schnittpunkte mit letzteren vertikal nach G_2B und K_2B zu projizieren, was γ und δ giebt. In das Rechteck $\alpha\beta\delta\gamma$ ist dann die Parabel $\gamma R\delta$ einzuzeichnen.

Bemerkung: Die Geraden G_2H_2 und K_2J_2 sind nicht die einzigen geraden Linien der sattelförmigen Fläche. Die Tangenten der Grenzlinie *abecd* sind ebenfalls Gerade der Fläche. Dieselbe hat eine interessante Bedeutung: Taucht man ein windschiefes Drahtviereck, welches jedoch symmetrisch ist, in Seifenwasser und zieht es wieder heraus, so ist die Fläche, welche die darin hängen bleibende Seifenblase bildet, infolge der Kontraktionskraft die kleinste mögliche Fläche zwischen den Viereckseiten. Sie ist identisch mit dem behandelten Paraboloid.

Wie alle behandelten Kegelschnittsflächen, so hat auch diese die Eigenschaft, dafs alle Parallelschnitte ähnliche Kurven geben. Handelt es sich um hyperbolische Schnitte beliebiger Richtung, so kann man stets durch Parallelverschiebung erreichen, dafs die beiden Scheitelpunkte der Hyperbel zusammenfallen, dafs also der Schnitt in Gestalt zweier Geraden erscheint. Hieraus ergeben sich neue Konstruktionsmethoden für Figur 131.

Dreht man diese Figur um 90^0, so läfst sie sich betrachten als ein Spezialfall des elliptischen Paraboloids, als denjenigen nämlich, bei welchem der horizontale Ellipsenschnitt sich bis ins Unendliche erstreckt, also eine Parabel giebt. Damit rückt aber auch der Mittelpunkt für die vertikalen Hyperbelschnitte ins Unendliche, so dafs auch diese Parabeln geben. Da nun das elliptische Hyperboloid Gerade auf sich hat, so mufs auch das hyperbolische Paraboloid Gerade auf sich haben.]

Andere Kegelschnittsflächen, als die behandelten, giebt es nicht.

Digitized by Google

Kapitel III.

Einiges über Zentralprojektionen und über die Malerperspektive.

§ 27.

Zentralprojektion geradliniger Gebilde.

Im allgemeinen ist die Zentralprojektion eines Punktes stets ein Punkt, die einer Geraden stets eine Gerade. Kennt man also von der Projektion einer Geraden zwei Punkte, so ist ihre ganze Projektion bekannt. — Die Projektion eines Strahlenbüschels giebt im allgemeinen wieder ein Strahlenbüschel. Dabei kann der Fall eintreten, dafs ein im Endlichen liegender Büschelpunkt in unendliche Entfernung projiziert wird. Dann schneiden sich in der Projektion die Strahlen in unendlicher Entfernung, d. h. sie sind parallel. Dies geschieht stets, wenn die den Büschelpunkt projizierende Linie zur Projektionsebene parallel ist.

Zur Erläuterung sind in Figur 132 zwei sich senkrecht schneidende Ebenen I und II gezeichnet. Von dem Raumpunkte P aus ist II auf I, oder, was dasselbe ist, I auf II projiziert worden. Die Linie PK_1 sei parallel zu Ebene I. Geht nun von K_1 ein Strahlenbüschel aus, z. B. K_1A, K_1F, K_1D, K_1X_1, K_1Y_1, so entsprechen demselben Linien in I, die von den entsprechenden Punkten A, F, D, X, Y aus nach dem unendlich fernen Punkte der Linie PK_1 gezogen, also der letzteren parallel sind. Von diesen Linien sind AB, FE und DC sichtbar, während die Projektionen von K_1X_1 und K_1Y_1 ganz in unendliche Entfernung fallen. Die Projektion von B_1C_1, welches parallel zu AD und Y_1X_1 gezogen ist, wird als BC denselben Linien parallel. Dem Parallelogramm (z. B. Rechteck) $ABCD$ entspricht das Trapez AB_1C_1D.

Betrachtet man die Ebene II als senkrechte Glastafel, die Ebene I als Horizontalebene, P als das Auge des Beschauers, PK_1 als Lot auf Ebene II, so erkennt man, dafs allen Linien der Ebene I, die auf Ebene II senkrecht stehen, wie z. B. AB, FE und DC, Linien AB_1, FE_1, DC_1 auf der Glastafel entsprechen, die sich verlängert in dem Punkte K_1, dem sogenannten Augenpunkte, treffen, dafs ferner dem unendlich fernen Bereich der Ebene die Horizontale X_1Y_1, der sogenannte Horizont entspricht. Allen Parallelenscharen in Ebene I entsprechen Strahlenbüschel in II, die ihren Büschelpunkt

Digitized by Google

in einem Punkte des Horizontes $X_1 Y_1$ haben, einem sogenannten Accidentalpunkte. Die Parallelen zu AD in Ebene I sind die einzigen, denen auch in Ebene II Parallele zu AD entsprechen. — Hierin liegen die ersten Grundbegriffe der Maler-Perspektive. — [Für vorgeschrittene Schüler sei bemerkt, dafs bei dieser Projektion harmonische Punkte stets in harmonische Punkte, harmonische Strahlen stets in harmonische Strahlen übergehen.]

Einem geradlinigen Polygon in Ebene I entspricht im allgemeinen ein solches in Ebene II. So entsprechen einander die Vierecke $ABCD$ und AB_1C_1D in Figur 132. Man kann P als die Spitze einer Pyramide mit Grundfläche $ABCD$ betrachten. Die Pyramide ist durch die Ebene II in der Fläche AB_1C_1D geschnitten.

Wäre die Ebene II parallel zur Ebene I, so würden die sich entsprechenden Polygone ähnlich sein, denn bei jeder Pyramide ist der Parallelschnitt zur Grundfläche der letzteren ähnlich. Folglich: Ebenen Figuren, deren Ebene parallel zur Ebene der Glastafel (II) ist, entsprechen auf dieser geometrisch ähnliche Figuren.

Es kann nun gefragt werden, wie Punkte der Ebene II, die höher als K_1 liegen, von P aus auf Ebene I zu projizieren sind. In Figur 132 ist dies an dem Punkte L_1 erläutert worden: die Linie PL_1 ist rückwärts über P hinaus zu verlängern, bis sie die Ebene I in L trifft, welches auf FG liegt. Dann ist L die Projektion von L_1. Für die Maler-Perspektive ist dies aber ohne Bedeutung.

Daraus folgt, dafs die Zentralprojektion eines Polygons nicht immer als geschlossenes Polygon im gewöhnlichen Sinne erscheint. Liegt nämlich ein Teil der Polygonpunkte in II oberhalb, der andere Teil unterhalb $X_1 Y_1$, so wird letztere Linie von den Polygonseiten mindestens zweimal passiert, folglich liegt ein Teil der Projektion auf dem vor AD, besser noch vor MN, befindlichen Teile von I, der andere auf dem dahinter befindlichen Teile von I, und beide Teile hängen nur durch Vermittelung des unendlichen Bereiches der Ebene I miteinander zusammen.

Für alle zu I parallele Ebenen, die man von P aus auf II projizieren will, erhält man dieselbe Horizontlinie $X_1 Y_1$, wie vorher. Was also von den Parallelenscharen der Ebene I gesagt war, gilt von allen horizontalen Parallelenscharen des Raumes überhaupt. Sie geben stets Strahlenbüschel, deren Büschelpunkt im Horizonte $X_1 Y_1$ liegt.

Digitized by Google

Aufgabe 166. Zu einem beliebigen Punkte Z der Ebene I den entsprechenden auf Ebene II zu bestimmen. (Figur 132.)

Aufl. Man ziehe $ZW \parallel BA$, verbinde W mit K_1 und ziehe PZ. In Z_1 schneiden sich die beiden letzten Linien, und dort liegt der Projektionspunkt. Warum?

Aufgabe 167. Zu einem beliebigen Punkte Z_1 der Ebene II den entsprechenden auf I zu finden. (Figur 132.)

Aufl. Ähnlich wie vorher.

Aufgabe 168. Zu einem beliebigen Polygone der Ebene I das entsprechende in II zu konstruieren.

Aufgabe 169. Zu einem beliebigen Polygone der Ebene II das entsprechende in I zu konstruieren.

Aufgabe 170. Ein Raumpunkt T befinde sich senkrecht über dem Punkte Z der Ebene I. Der entsprechende Punkt der Ebene II soll konstruiert werden.

Aufl. Man ziehe PT und die Senkrechte durch Z_1. Der (nicht gezeichnete) Punkt T_1, in dem sich beide Linien schneiden, ist der gesuchte. Die Linie Z_1T_1 ist die Projektion von ZT.

Bemerkung: Man erkennt zunächst, dafs bei der Malerperspektive senkrechten Geraden senkrechte Gerade entsprechen. Denselben Punkt T_1 würde man auch gefunden haben, indem man von T auf Ebene II ein Lot gefällt und den Fufspunkt desselben mit K_1 verbunden hätte. Der Schnittpunkt dieser Linie mit PT würde der Projektionspunkt sein.

Aufgabe 171. Auf Ebene I (Fig. 132) stehe ein in Parallelperspektive gezeichneter Würfel. Derselbe soll mittels des Punktes P auf Ebene II projiziert werden.

Bemerkung: Entsprechende Aufgaben kann man auch für den Fall lösen, dafs beide Ebenen (I und II) sich schiefwinklig schneiden. Um stets die Anwendung auf die Maler-Perspektive zu erhalten, lasse man Ebene II senkrecht stehen, Ebene I aber schräg. Die Figur wird besonders anschaulich, wenn man die gezeichneten Teile beider Ebenen sich als Rechtecke denkt. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. In dem einfacheren Falle wird die Schnittlinie AD parallel zu gewissen Seiten beider Rechtecke. In dem anderen Falle findet dieser Parallelismus gar nicht oder nur zum Teil statt.

Aufgabe 172. Für beide Fälle sind die Aufgaben dieses Abschnitts zu wiederholen.

Digitized by Google

§ 28.

Zentralprojektion des Kreises und der übrigen Kegelschnitte.

Man beginne mit der Aufgabe, ein in Ebene I der Figur 132 liegendes Quadrat (dort parallelperspektivisch als Parallelogramm zu zeichnen) mittels des Projektionszentrums P in die Ebene II zu übertragen. Sodann denke man sich den dem Quadrate einbeschriebenen Kreis gezeichnet, der in der parallelperspektivischen Figur als Ellipse erscheint, die dem Parallelogramm einbeschrieben ist und in den Halbierungspunkten der Seiten berührt. Diese Figur denke man sich dann mittels P nach der Ebene I projiziert. Die Projektion ist dadurch ermöglicht, dafs man jeden Punkt der Ebene I nach II projizieren kann.

Es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder ist das eine Seitenpaar des Quadrates der Schnittlinie AD beider Ebenen parallel, oder es findet kein Parallelismus statt. Im ersten Falle werden zwei Seiten des projizierten Vierecks parallel, im andern ist keins der Seitenpaare parallel.

Dem ersten Falle entspricht Figur 133, wo $AB \parallel DC$ ist. Dort ist E der Schnittpunkt der Diagonalen. Legt man durch E die Gerade HJ parallel zu AB, so sind H und J Berührungspunkte der zu zeichnenden Ellipse. Ist ferner K der Schnittpunkt von AD und BC und zieht man KE bis F, so sind F und G ebenfalls Berührungspunkte der einzuzeichnenden Ellipse. Warum?

Dem zweiten Falle entspricht Figur 134, wo X und Y die Schnittpunkte der Viereckseiten sind. Ist J der Schnittpunkt der Diagonalen, so geben die Linien XJ und YJ die Berührungspunkte E, F, G und H der zu konstruierenden Ellipse. Warum?

Bei beiden Fällen war angenommen, dafs die zu transformierende Figur ganz in dem hinter der Linie AD (Figur 132) befindlichen Teile der Ebene I liegt. Würde P senkrecht über dem Rande oder dem Innern des in I gegebenen Kreises liegen, so würde die Projektionsfigur eine Parabel oder eine Hyperbel werden, wozu man die Bemerkungen über den Fall vergleiche, wo das projizierte Polygon aus zwei getrennten Teilen bestand.

Entsprechendes ergiebt sich bei folgenden Aufgaben:

Aufgabe 173. Einen Kreis der Ebene II (Figur 132) von P aus nach der Ebene I zu projizieren, und zwar unter der Voraussetzung, dafs alle Punkte des Kreises unterhalb $X_1 Y_1$ liegen. (Fall der Ellipse.)

Digitized by Google

Aufgabe 174. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dafs der unterhalb $X_1 Y_1$ liegende Kreis diese Linie berührt. (Fall der Parabel.)

Aufgabe 175. Dasselbe für den Fall, dafs der Kreis die Gerade $X_1 Y_1$ schneidet. (Fall der Hyperbel.)

Bemerkung: Das Resultat der drei Aufgaben läfst sich durch folgenden Versuch veranschaulichen: Man stelle eine Kreisscheibe senkrecht auf einen Tisch und beleuchte sie durch ein Licht, welches zuerst höher gestellt wird, als der höchste Punkt des Kreises, sodann ebenso hoch, zuletzt tiefer. Der Schatten wird dann eine Ellipse, oder eine Parabel, oder endlich ein Arm einer Hyperbel.

Das häufige Auftreten der Kegelschnitte, besonders der Ellipse, in perspektivischen Zeichnungen legt den Wunsch nahe, statt der umständlichen Konstruktion der einzelnen Punkte nach obiger Methode ein kürzeres Verfahren aufzufinden. Es wird sich zeigen, dafs man nur nötig hat, 5 Punkte, oder 5 Tangenten, oder überhaupt 5 Elemente irgend welcher Art zu konstruieren, um sodann beliebig viele Punkte des Kegelschnitts nach einfachem Schema zu bestimmen.

Diese Konstruktionen geschehen nach den Sätzen von Pascal und Brianchon, deren Beweis für den Kreis man in den neueren Lehrbüchern der Elementargeometrie findet.

a) Pascalscher Lehrsatz: Die Gegenseiten des einem Kreise einbeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.

In Figur 135 ist der Satz veranschaulicht. Seite 1 und 4 schneiden sich in P, 2 und 5 in Q, 3 und 6 in R. P, Q und R liegen auf einer Geraden.

In Figur 136 ist dasselbe an einem Sechseck $ABCDEF$ gezeigt, dessen Seiten sich innerhalb des Kreises schneiden. Auch hier liegen P, Q und R auf gerader Linie.

b) Brianchonscher Lehrsatz: Die Verbindungslinien der Gegenecken des einem Kreise umbeschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem Punkte.

In Figur 137 schneiden sich die Diagonalen AD, BE und CF des Sechsecks $ABCDEF$ in einem Punkte Z.

In Figur 138 dagegen ist das Tangentensechseck I II III IV V VI gezeichnet, dessen Seiten sich willkürlich durchkreuzen. Auch hier schneiden sich die Geraden I IV, II V, III VI in einem Punkte.

Digitized by Google

Beliebige Zentralprojektionen der Pascalschen und Brianchonschen Figuren zeigen, dafs die Sätze ganz allgemein von den Kegelschnitten gelten.

Aufgabe 176. Die Sätze von Pascal und Brianchon sollen an der Ellipse, Parabel und Hyperbel durch Zeichnungen veranschaulicht werden, zunächst für Sechsecke im gewöhnlichen Sinne, sodann für Sechsecke mit Kreuz- und Querzügen.

Bemerkung: Bei der Parabel ist ein umbeschriebenes Sechseck im gewöhnlichen Sinne nicht möglich. — Ein Sechseck, dessen Gegenseiten sich in Punkten schneiden, die auf einer Geraden liegen, soll stets ein Pascalsches Sechseck heifsen, ein Sechseck, dessen drei Hauptdiagonalen durch einen Punkt gehen, soll als Brianchonsches Sechseck oder Sechsseit bezeichnet werden.

Hat man ein beliebiges Fünfeck, so läfst sich ein sechster Punkt stets so dazukonstruieren, dafs ein Pascalsches Sechseck entsteht. Dieser sechste Punkt läfst sich sogar unendlich oft konstruieren, und die Reihe der sämtlichen sechsten Punkte giebt den dem ursprünglichen Fünfeck umbeschriebenen Kegelschnitt.

Aufgabe 177. Beliebig viele Punkte des Kegelschnitts zu konstruieren, der einem gegebenen Fünfeck umbeschrieben werden kann.

Aufl. A, B, C, D, E in Figur 139 seien die Ecken des gegebenen Fünfecks. Die Geraden AB und DE (1 und 4) schneiden sich im Punkte P. Durch letzteren lege man eine beliebige Linie PX_1. Man ziehe jetzt die Gerade BC bis zum Schnitte Q_1 mit PX_1, die Gerade CD bis zum Schnitte R_1 mit PX_1. Die Geraden Q_1E und R_1A schneiden sich dann in einem Punkte Y_1, der so liegt, dafs $ABCDEY_1$ ein Pascalsches Sechseck, PX_1 die zugehörige Pascalsche Linie ist, auf der sich die Gegenseiten schneiden.

Man ziehe nun beliebig durch P eine Gerade PX_2, die von BC in Q_2 und von CD in R_2 geschnitten wird; dann geben Q_2E und R_2A einen Schnittpunkt Y_2, der ebenfalls zum Kegelschnitt gehört. So fahre man fort.

Bemerkenswert ist, dafs so beliebig viele Kegelschnittpunkte mit alleiniger Hilfe des Lineals, also ohne Anwendung des Zirkels, gefunden werden.

Bemerkung: In der vollendeten Figur 139 liegen alle Punkte

Digitized by Google

Q auf der Geraden BC, alle Punkte R auf der Geraden CD; ein Strahlenbüschel geht durch P, ein anderes durch E, ein drittes durch A. Unter Weglassung alles Nebensächlichen handelt es sich also, wie Figur 140 zeigt, um Folgendes: Von einem Punkte A aus sind nach einer beliebigen Geraden FG beliebig viele Strahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... gezogen, welche die Schnittpunkte $R_1, R_2, R_3 \ldots$ geben. Die letzteren sind mit einem beliebigen Punkte P verbunden. Das dadurch entstehende zweite Strahlenbüschel ist durch eine beliebige Gerade HJ in den Punkten $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$. geschnitten, die mit dem beliebigen Punkte E verbunden sind, was ein drittes Strahlenbüschel mit den Strahlen I, II, III .... giebt. Die Durchschnitte der Strahlen 1 und I, 2 und II, 3 und III u. s. w. geben Punkte $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$. die sämtlich auf einem Kegelschnitte liegen.

Man nennt nun zwei Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen sich, wie bei den Büscheln A und P, auf einer Geraden schneiden, perspektivische Strahlenbüschel; Strahlenbüschel dagegen, die, wie die Büschel A und E, so miteinander zusammenhängen, dafs es zwischen beiden ein Büschel P giebt, welches zu beiden perspektivisch ist, nennt man projektivische Strahlenbüschel.

Aus Obigem ergiebt sich also folgender Satz:

Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel liegen stets auf einem Kegelschnitte. Ist derselbe im speziellen Falle eine gerade Linie, so sagt man, die projektivischen Büschel befinden sich in perspektivischer Lage. Man braucht dann nur das eine gegen das andere zu verschieben, wenn man statt der Geraden einen Kegelschnitt haben will. Verschiebt man ein Büschel gegen sich selbst, so wird der Ort der Durchschnittspunkte ein Kreis, wie sofort aus dem Satze über die Peripheriewinkel hervorgeht.

Aufgabe 178. Beliebig viele Tangenten des Kegelschnitts zu konstruieren, der einem gegebenen Fünfseit eingeschrieben werden kann.

Aufl. In Figur 141 sind die 5 Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 und EE_1 gegeben, die sich aufeinanderfolgend in den Punkten I, II, III und IV schneiden. Man ziehe die Linie I IV und nehme auf ihr willkürlich den Brianchonschen Punkt Z_1 an. Die Gerade II Z_1 giebt auf EE_1 den Punkt X_1, die Gerade III Z_1 giebt auf AA_1 den Punkt Y_1. Die Gerade $X_1 Y_1$ ist eine der gesuchten Tangenten, denn die

Digitized by Google

Figur I II III IV $X_1 Y_1$ ist ein Brianchonsches Sechseck geworden. Ebenso verfahre man mit dem benachbarten Punkte Z_2, der eine Tangente $X_2 Y_2$ giebt, mit Z_3, welcher $X_3 Y_3$ giebt u. s. w.

Läfst man die Z dicht aufeinander folgen, so schattieren die dicht aufeinander folgenden Tangenten den Kegelschnitt sehr genau aus. Die Linie I IV ist dabei als unbegrenzt verlängert zu denken.

Unter Weglassung alles Unwesentlichen handelt es sich, wie Figur 142 zeigt, um Folgendes: Es sind drei willkürliche Linien AA_1, EE_1 und LL_1 gegeben. Von einem willkürlichen Punkte II aus sind die Punkte $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$. der Linie LL_1 auf die Gerade EE_1 projiziert, was die Punkte X_1, X_2, $X_3, \ldots$. giebt. Ferner sind die Punkte Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots$. mit einem willkürlichen Punkte III verbunden, so dafs ein Büschel entsteht, welches von der Geraden AA_1 in den Punkten Y_1, Y_2, $Y_3 \ldots$. geschnitten wird. Die Verbindungslinien $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, $X_3 Y_3, \ldots$. sind, wie oben, Tangenten eines Kegelschnitts.

Punktreihen, die, wie die X und die Z in Figur 142, durch einfache Projektion zu einander in Beziehung versetzt sind, nennt man perspektivische Punktreihen, solche hingegen, die sich wie die X und die Y in Figur 142 verhalten, die also durch Vermittelung einer Punktreihe Z, d. h. durch zweimalige Projektion ineinander übergeführt werden können, nennt man projektivische Punktreihen. Man hat also den Satz:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte projektivischer Punktreihen schattieren einen Kegelschnitt aus.

Ist derselbe ein Punkt, so hat man die perspektivische Lage. Verrückt man aber die eine Reihe gegen die andere, so entsteht statt des Punktes ein Kegelschnitt. Verrückt man eine Punktreihe gegen sich selbst, so schattieren die Verbindungslinien im allgemeinen eine Parabel aus. Auch diese Konstruktionen geschehen mit dem Lineal allein und ohne jeden Gebrauch des Zirkels.

Von den zahlreichen Aufgaben, die hiermit zusammenhängen, sei nur eine häufiger anwendbare ausgewählt:

Aufgabe 179. In ein gegebenes Vierseit soll derjenige Kegelschnitt einbeschrieben werden, der eine der Seiten in einem gegebenen Punkte berührt.

Aufl. In Figur 143 ist die Konstruktion angedeutet, die man benutzt, wenn man den Kegelschnitt durch Tangenten ausschattieren will. Sind AA_1, BB_1, CC_1 und DE_1 die vier gegebenen Linien, und der doppelt bezeichnete Punkt $D_1 E$ der gegebene Berührungs-

Digitized by Google

punkt, so bezeichne man den Schnitt von AA_1 und BB_1 mit I, den von BB_1 und CC_1 mit II, den von CC_1 und DD_1 mit III, und betrachte den Punkt D_1E, der mit IV bezeichnet werden mag, als Schnitt der zusammenfallenden Linien DD_1 und EE_1. Die Konstruktion erfolgt dann, wie vorher. Man zieht I IV und nimmt darauf beliebig Z_1 an. Die Gerade II Z_1 giebt X_1 auf EE_1, die Gerade III Z_1 giebt Y_1 auf AA_1. Die Gerade X_1Y_1 ist die erste der gesuchten Tangenten. Mit einem beliebig auf I IV gewählten Punkte Z_2 kann man fortfahren. Dabei ist die Linie I IV ins Unendliche zu verlängern.

Man wiederhole die Aufgabe an Rechtecken, denen die symmetrisch liegende Ellipse einzubeschreiben ist, an Trapezen, wie Figur 133, und an Vierecken, wie Figur 134. Wie geschieht die Konstruktion wenn 4 Punkte und die Tangente durch einen von ihnen gegeben sind. (Vgl. Aufgabe 177.)

Aufgabe 180. In Ebene II der Figur 132 sei ein beliebiger Kegelschnitt eingezeichnet. Derselbe soll von P aus nach Ebene I projiziert werden.

Aufl. Man projiziere 5 seiner Punkte nach Ebene I, was in zahlreichen Fällen mit verschiedenen Vereinfachungen vor sich gehen kann, und konstruiere sodann beliebig viele Punkte des durch die 5 konstruierten Punkte gehenden Kegelschnitts mit dem Lineal allein. (Nach dem Pascalschen Satze.)

Die Richtigkeit der Konstruktion ergiebt sich daraus, dafs jeder ebene Schnitt durch den Kegelschnittskegel einen Kegelschnitt giebt.

Bemerkung: Statt 5 Punkte zu projizieren, kann man auch 5 Tangenten übertragen. — Die Aufgaben, einen Kegelschnitt aus 3 Tangenten und 2 Berührungspunkten auf ihnen, aus 3 Punkten und den Tangenten in zweien von ihnen zu konstruieren, werden ähnlich wie Aufgabe 179 behandelt.

§ 29.

Weitere Andeutungen über die Malerperspektive.

Man denke sich in Ebene I der Figur 132 alle Linien gezeichnet, die gegen die Schnittlinie AD unter $\pm 45^0$ geneigt sind, und projiziere sie sämtlich mit Hilfe des Zentrums P nach der Ebene II. Wo haben beide Parallelenscharen ihre Verschwindungspunkte?

Nach § 27 mufs man von P aus eine Parallele zu jeder der beiden Scharen ziehen, welche die Ebene II in der Linie X_1Y_1 trifft. Geschieht dies in einem Punkte Z_1, so ist PK_1Z_1 ein rechtwinklig

Digitized by Google

gleichschenkliges Dreieck, also $PK_1 = K_1Z_1$. Folglich: Die Bilder aller Horizontalen, welche gegen die Schnittlinie AD der Figur 132 unter $\pm$ 45° geneigt sind, laufen zusammen in zwei Punkten Z_1 und Z_2 des Horizontes X_1Y_1, die von K_1 ebenso weit entfernt sind, wie P von K_1.

Man nennt diese beiden Verschwindungspunkte ganz zweckmäfsig die Distanzpunkte. Eine wichtige Anwendung derselben bietet folgende Aufgabe:

Aufgabe 181. In Figur 144 sei DD_1 der Horizont, A der Augenpunkt, D und D_1 die beiden Distanzpunkte. Auf der horizontalen Linie BX seien durch C_1, C_2, C_3 ... gleiche Strecken abgeschnitten. Die Linie soll mit ihrer Teilung als senkrecht gegen die Ebene der Zeichnung gerichtete Gerade perspektivisch gezeichnet werden.

Aufl. BA ist die Richtung der gesuchten Linie. Man verbinde alle Teilpunkte C_1, C_2, C_3, ... mit dem Distanzpunkte D, wodurch man die Schnittpunkte F_1, F_2, F_3 ... und mit ihnen die gesuchte Einteilung, den perspektivischen Mafsstab für die Linie BA, erhält.

Der Beweis ergiebt sich daraus, dafs nach Obigem alle nach D gezogenen Linien solche Horizontalen darstellen, die unter 45° gegen BX geneigt sind, so dafs die Dreiecke C_1BF_1, C_2BF_2 u. s. w. rechtwinklig-gleichschenklige sein müssen.

Bemerkung: Macht man $BF = BC_1$, und zieht man FA und BD, so hat man mit den früheren Linien auf FA die Schnittpunkte G_1, G_2, G_3 ..., die ebenfalls die obige Teilung wiedergeben. Die Verbindungslinien F_1G_1, F_2G_2, F_3G_3 u. s. w. sind also horizontal, und die Zeichnung stellt eine Reihe von Quadraten dar, die in der Richtung nach A aufeinander folgen. Die Diagonalen FF_1, G_1F_2, G_2F_3 ... gehen sämtlich nach dem zweiten Distanzpunkte D_1.

Aufgabe 182. Figur 144 soll dahin vervollständigt werden, dafs auf die Quadrate abwechselnd die zugehörigen Würfel aufgesetzt werden.

Bemerkung: Man vollende das Quadrat $BFYX$ und fahre so fort, wie es sich aus der Figur 145 ergiebt. — Die Diagonalen der oberen Quadrate würden wiederum nach den Distanzpunkten gehen. Auch die Diagonalen der senkrechten Seitenflächen $BXZE_1$, $FYVG_1$ u. s. w. treffen sich in je einem Distanzpunkte besonderer Art. Diese beiden liegen in der Linie AS und sind beide von A um die Strecke AD entfernt. (Warum?)

Digitized by Google

Regel: Um von perspektivischen Zeichnungen einen möglichst körperlichen Eindruck zu erhalten, stelle man sie senkrecht auf und bringe das Auge, mit welchem man sehen will, genau vor den Augenpunkt A, und zwar in die Entfernung AD. Die Stellung des Auges entspricht dann dem Projektionszentrum P der Figur 132. An Figur 145 läfst sich die Regel sehr gut erproben, sobald AD hinreichend grofs angenommen ist. Unsere Figuren sind sämtlich zu klein für diesen Versuch.

In Figur 146 ist ein Punkt P bezw. P_1 nach bekannter Methode in Grundrifs und Aufrifs dargestellt, er schwebt also in der Höhe h über der Grundrifsebene und befindet sich in der Entfernung e hinter der Aufrifsebene. In Figur 147 sei DD_1 der Horizont, A der Augenpunkt, AD die Distanz, B_2C_2 die willkürlich angenommene Schnittlinie der Grundrifs- und Aufrifsebene, die also den Linien BC und B_1C_1 in Figur 146 entspricht. Auch F, F_1 und F_2 sollen einander entsprechen. Zu lösen ist folgende

Aufgabe 183. Den durch Grund- und Aufrifs gegebenen Punkt P (P_1) in die perspektivische Zeichnung (147) zu übertragen.

Aufl. Man mache FL_2 in Figur 147 gleich FL in 146, ziehe die Senkrechte $L_2P_2 = h$ und ziehe L_2A und P_2A. Macht man

$$L_2N = e$$

und zieht man ND, so erhält man den Schnittpunkt Q auf L_2A. Durch diesen ziehe man die Senkrechte QP_3 bis zum Schnitte P_3 mit P_2A. Dann ist P_3 der gesuchte Punkt.

Beweis: Der Beweis ergiebt sich aus den Betrachtungen über die Distanzpunkte.

Nach der angegebenen Methode kann man jetzt jeden Körper, dessen Zeichnung in Grundrifs und Aufrifs gegeben ist, in Zentralperspektive darstellen. Es ist eben möglich, die gegebene Zeichnung Punkt für Punkt zu übertragen. Jedesmal müssen Augenpunkt und Distanzpunkte gegeben sein, ebenso die Horizontale, welche der Schnittlinie zwischen Grund- und Aufrifs entsprechen soll, und der Punkt auf letzterer, der dem senkrecht unter dem Augenpunkte liegenden entsprechen soll.

In der Regel wird man die Konstruktionen erheblich vereinfachen, besonders durch Beachtung des Gesetzes, dafs, wenn man zwei in Wirklichkeit parallele Linien in die Perspektive übertragen

Digitized by Google

hat, ihr Schnittpunkt der Punkt ist, nach welchem alle Parallelen hingehen müssen. Auch wird man von etwa auftretenden Ellipsen (oder anderen Kegelschnitten) nur die nötigen 5 Elemente konstruieren und dann die Zeichnung nach einer der angegebenen mathematischen Methoden vollenden.

Von krummflächigen Körpern geben besonders die Rotationskörper dankbare Übungsbeispiele. Man zeichnet sie perspektivisch, indem man im Grund- und Aufriſs zahlreiche ebene Schnitte senkrecht gegen die Rotationsaxe legt, diese Kreisschnitte perspektivisch zeichnet und die einhüllende Grenzlinie mit beliebig groſser Annäherung einträgt.

Eine Reihe von Übungsbeispielen sei ohne weitere Darlegungen angegeben:

Aufgabe 184. Den aufrecht stehenden Würfel über Eck in Zentralperspektive zu zeichnen. (Vergl. Fig. 12.)

Aufgabe 185. Den Würfel in allgemeiner Lage in Zentralperspektive zu zeichnen. (Man lege Figur 23^d zu Grunde.)

Aufgabe 186. Das regelmäſsige Tetraëder in Zentralperspektive zu zeichnen. (Figur 29 werde zu Grunde gelegt.)

Aufgabe 187. Das regelmäſsige Oktaëder in allgemeiner Lage in Zentralperspektive zu zeichnen. (Figur 28^c werde zu Grunde gelegt.)

Aufgabe 188. Das regelmäſsige Pentagon-Dodekaëder in Zentralperspektive zu zeichnen. (Nach Figur 36.)

Aufgabe 189. Das regelmäſsige Ikosaëder in Zentralperspektive zu zeichnen. (Nach Figur 43.)

Aufgabe 190. Den Würfel in beliebiger Lage zu zeichnen und in die sichtbaren Seitenflächen die einbeschriebenen Kreise einzutragen. (Vergl. Fig. 63.)

Aufgabe 191. Die Ringe in Figur 65, 66 und 67 in Zentralperspektive zu zeichnen.

Aufgabe 192. Den Cylinder der Figur 75 nebst der Quadratteilung des Mantels in Zentralperspektive zu zeichnen.

Aufgabe 193. Die Schraubengewinde der Figuren 79 und 80 in Zentralperspektive darzustellen.

Aufgabe 194. Die beiden Kegel der Figur 83 in Zentralperspektive zu zeichnen.

Aufgabe 195. Die Durchdringung von Cylinder und Prisma in Figur 82 in Zentralperspektive zu zeichnen.

Digitized by Google

Aufgabe 196. Die Kugel in Zentralperspektive zu zeichnen.

1. Aufl. Man gehe vom regelmäfsigen Axenkreuze in einfachster Lage aus. In Figur 148 seien BC und EF die unverkürzt erscheinenden Axen desselben, A sei der Augenpunkt, D der eine Distanzpunkt. Verbindet man C und B mit dem Distanzpunkte D und zieht man AM, welches die Verbindungslinien in G und H schneidet, so ist GH die dritte Axe. Um M schlage man einen Kreis mit dem Radius MB und lege vom Augenpunkte A aus an diesen Tangenten, die ihn in X und Y berühren mögen. Dann sind X und Y Punkte der Ellipse, als welche die dem Axenkreuze umbeschriebene Kugel erscheint, und G und H sind ihre Brennpunkte. Die Elemente zu ihrer Konstruktion sind also vorhanden. — Die grofse Axe hat die Länge $GX + HX = 2a$. Schlägt man um den Halbierungspunkt M_1 der Linie GH, der selbstverständlich nicht mit M zusammenfällt, einen Kreis mit Radius a, der die Linie AM in J und K schneidet, so hat man in diesen Punkten die Endpunkte der grofsen Ellipsenaxe. Kreise um G und H, gleichfalls mit Radius a geschlagen, schneiden sich in den Endpunkten der kleinen Axe LN. Die Ellipse ist jetzt leicht zu vollenden.

Beweis: Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ergiebt sich aus Figur 86. Dieselbe läfst sich so auffassen, als ob jede der beiden Kugeln von M aus auf die schräge Schnittebene projiziert sei, wobei jede die schräge Ellipse als Projektion giebt. Der Berührungspunkt jeder Kugel war Brennpunkt der Ellipse. Zieht man in der einen Kugel den Durchmesser PP_1, in der andern den Durchmesser QQ_1, also jedesmal vom Brennpunkte aus, so geht aus Gründen der Ähnlichkeit die Linie MP_1 durch Q, die Linie MQ_1 durch P. Die Projektionen der Endpunkte jedes der beiden Durchmesser fallen also in die Brennpunkte P und Q der Ellipse.

Schneidet man nun den Kegel in Figur 86 durch eine beliebige zur vorigen parallele Ebene, so entsteht eine zur vorigen ähnliche Ellipse, deren Brennpunkte in den Strahlen MP und MQ liegen. Folglich:

Projiziert man eine Kugel von einem Punkte aus auf eine Ebene, so wird die Projektion im allgemeinen eine Ellipse, und zwar fallen die Projektionen der Endpunkte desjenigen Durchmessers, der auf der Ebene senkrecht steht, in die Brennpunkte der Ellipse.

In Figur 148 ist nun GH die Darstellung des auf der Ebene

Digitized by Google

der Zeichnung senkrechten Durchmessers, also sind G und H die beiden Brennpunkte.

Es bleibt noch zu beweisen, dafs X und Y Punkte der Ellipse sind, als welche die Kugel erscheint.

Denkt man sich die Kugel durch lauter Horizontalebenen geschnitten, so schneiden in Figur 148 die Schnittlinien den Hauptkreis $BFCE$ so, dafs die Tangente der Schnittkurve im Schnittpunkte jedesmal nach dem Augenpunkte A gerichtet ist. Überall findet ein wirkliches Schneiden statt, nur die Punkte X und Y sind ausgenommen, in denen der Hauptkreis selbst nach A gerichtete Tangenten hat. Diese Punkte gehören also zu der gesuchten Ellipse.

Bemerkung: Durch Eintragen von Parallelkreisen und Meridianen kann man erreichen, dafs die Zeichnung einen plastischen Eindruck macht.

2. Konstruktionsmethode: Man zeichne eine gröfsere Zahl der eben erwähnten Horizontalschnitte in Zentralperspektive, die also sämtlich als Ellipsen erscheinen. Die umhüllende Ellipse wird sodann mit Annäherung eingetragen.

Bemerkung: Diese zweite Methode ist die in den Lehrbüchern gebräuchliche, jedoch weniger exakte. Auch ist sie umständlicher, als jene, da dort die Brennpunkte und die Axenlängen ohne Weiteres vorhanden sind.

§ 30.

Die stereographische Projektion der Kugeloberfläche.

Es handelt sich in diesem Abschnitt um die Karten der östlichen und westlichen, der südlichen und nördlichen Halbkugel, der Halbkugel der gröfsten und kleinsten Wassermasse u. s. w., wie man sie in jedem geographischen Atlas findet. Diese zuerst von Hipparch, später von Ptolemäus benutzten Darstellungen sind eine interessante Anwendung der Zentralprojektion und unter dem Namen der stereographischen Projektion des Ptolemäus bekannt.

Der Vorzug dieser Karten besteht darin, dafs auf ihnen den Meridianen und Parallelkreisen des Globus zwei Kreisscharen entsprechen, die sich rechtwinklig schneiden, und dafs die Darstellung dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Die Projektion geschieht folgendermafsen: Figur 149 stelle den Globus in Grund- und Aufrifs dar, auf der Ebene XY stehend. Q sei der Berührungspunkt, P der ihm gegenüberliegende Punkt der

Digitized by Google

Kugelfläche. Von letzterem aus werde jeder Punkt der Kugelfläche auf die „Antipodenebene“ XY projiziert. So ist z. B. A_1 die Projektion von A. Faſst man PA als ebenen Kreisschnitt auf, der im Grundriſs als Ellipse erscheint, so ist im Aufriſs A_1 die Projektion des ganzen Kreisschnittes, im Grundriſs also erscheint die Projektion desselben als die Gerade A_1L, die aber unbegrenzt zu denken ist. Je näher nämlich ein Punkt, z. B. der Punkt A, an P liegt, um so weiter ist seine Projektion von Q entfernt. Von der nächsten Umgebung von P kann man sagen, ihre Projektion falle in den unendlich fernen Bereich der Ebene XY. Folglich:

Bei der stereographischen Projektion wird jeder durch P gehende Kreis der Kugelfläche im allgemeinen als unbegrenzte gerade Linie projiziert, und zwar ist dieselbe (A_1L) parallel zu der Tangente des Kugelkreises im Punkte P_1.

Eine Ausnahme machen nur die gröfsten Kreise durch P, deren Projektion ein Strahlenbüschel durch Q ist.

Figur 150 ist eine Grundriſszeichnung, wie der eine Teil von Figur 149, jedoch sind zwei Kugelkreise durch P gelegt, die ungleich sein können. Werden beide von P aus auf die Grundriſsebene projiziert, so entstehen, wie vorher, unbegrenzte Gerade VV_1 und WW_1, und zwar ist VV_1 parallel zur Tangente PK des einen Kreises, WW_1 parallel zur Tangente PL des anderen, so daſs

$$\sphericalangle VR_1W = \sphericalangle KPL$$

ist. Der Schnittpunkt R_1 der beiden Geraden ist aber die Projektion des Schnittpunktes R der beiden Kreise, und bekanntlich schneiden sich diese bei R unter demselben Winkel, wie bei P. (Tangente MP = Tangente MR, Tangente NP = Tangente NR und

$$MN = MN,$$

also

$$\triangle PMN \cong RMN,$$

folglich sind die Schnittwinkel bei P und R gleich.) Es ist also auch

$$\sphericalangle MRN = \sphericalangle VR_1W = V_1R_1W_1.$$

Folglich: Zwei durch P und R gehende Kreise werden so projiziert, daſs ihnen zwei Schnittlinien entsprechen, die sich unter demselben Winkel schneiden, wie die Kreise bei P und bei R.

Durch R kann man sich beliebige andere Kreise denken, die auch die Tangente RM und RN haben, aber nicht durch P gehen. Da diese Kreise längs einer sehr kleinen Strecke mit RN und RM

Digitized by Google

zusammenfallen, so fallen ihre Projektionen längs einer sehr kleinen Strecke mit $R_1 V_1$ und $R_1 W_1$ zusammen. Also auch in diesem Falle schneiden sich die Projektionen unter demselben Winkel, wie die Kreise.

Denkt man sich also bei R ein sehr kleines Kreisdreieck auf der Kugel, so entspricht demselben im Grundrifs ein sehr kleines Bogendreieck bei R_1, dessen Seiten man mit grofser Annäherung als geradlinig betrachten kann, und dessen Winkel denen des ursprünglichen Dreiecks gleich sind. Auch einem wirklichen kleinen Dreieck der Ebene entspricht ein gleichwinkliges Bogendreieck auf der Kugel. Folglich:

Die stereographischen Projektionen sehr kleiner Dreiecke auf der Kugelfläche sind ähnliche Dreiecke auf der Projektionsebene. Überall ist also die Projektion dem Originale in den kleinsten Teilen ähnlich. Es handelt sich demnach hier um eine konforme oder winkeltreue Abbildung.

Es läfst sich ferner beweisen, dafs bei der stereographischen Projektion jeder beliebige Kreis auf der Kugeloberfläche in einen Kreis auf der Projektionsebene übergeht.

In Figur 151 sei AB ein Kugelkreis, der so gelegt ist, dafs er im Aufrifs als Gerade erscheint. Zieht man PAA_1 und PBB_1, so hat man das Bild des zugehörigen Projektionskegels. Zieht man noch PQ und AQ, so ist $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ (als Peripheriewinkel), ferner $\alpha_1 = \alpha_2$ (beide sind Komplementwinkel von β), folglich ist $\sphericalangle \alpha = \alpha_2$, also ist $A_1 B_1$ die Richtung des Gegenschnitts zu AB, der nach § 22 (Aufgabe 140) ebenfalls ein Kreisschnitt ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Mittelpunkte beider Kreise entsprechen einander nicht, jedoch findet folgende Beziehung statt: Die Spitze des zum Kugelkreise gehörigen Tangentenkegels giebt als Projektion das Zentrum des Projektionskreises.

Beweis: In Figur 152 sei AB der Kugelkreis, $A_1 B_1$ seine Projektion. X sei die Spitze des Tangentenkegels, X_1 die Projektion von X. Legt man durch X die Horizontale VW, so ist nach Obigem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,$$

ferner $\alpha_1 = \alpha_4$ (Satz vom Tangentensehnenwinkel), folglich $\alpha_3 = \alpha_4$, demnach auch $BX = WX$. Auch AVX ist ein gleichschenkliges Dreieck, denn $\sphericalangle \delta = \beta + \alpha_3$ (Aufsenwinkel), also auch $\delta = \beta_1 + \alpha_1$ (denn $\alpha_1 = \alpha_3$ und $\beta_1 = \beta$), also sind die Basiswinkel gleich, folglich auch $AX = XV$. Da nun $AX = BX$, so folgt auch $VX = WX$,

Digitized by Google

folglich auch $A_1X_1 = B_1X_1$. Demnach ist X_1 der Mittelpunkt des Kreises A_1B_1.

Bemerkung: Ist der Kreis AB klein, so fällt X nahe an die Kugel und fast mit dem Zentrum des Kreises AB zusammen. Je kleiner also ein Kugelkreis ist, um so genauer entspricht sein Zentrum dem Zentrum des Projektionskreises. Dadurch bestätigt sich die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen.

Aufgabe 197. Die Polarkarte in stereographischer Projektion zu zeichnen.

Aufl. In Figur 153 sei P der Nordpol, Q der Südpol. AB ist der Äquator im Aufriſs, CD, EF und GH sind willkürlich gewählte Parallelkreise, z. B. $22\frac{1}{2}^0$, 45^0, $67\frac{1}{2}^0$. Die Projektion der unteren Kugelhälfte von P aus giebt die Durchmesser A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1, G_1H_1 für die zu zeichnenden Parallelkreise, die konzentrische werden. Die Meridiane erscheinen als Gerade durch Q. Sie folgen bei der willkürlichen Annahme in der Figur gleichfalls unter $22\frac{1}{2}^0$ aufeinander. Im Aufriſs sind sie weggelassen, damit die Figur deutlich bleibe.

Aufgabe 198. Die Karte der östlichen oder westlichen Halbkugel zu zeichnen.

Aufl. Die Projektion geschieht, wie Figur 154 zeigt, von einem Punkte P des Äquators aus auf die Antipodenebene. N_1 und S_1 werden die Pole in der Projektion. Sie sind als N_2 und S_2 nach unten verschoben worden. Durch beide Punkte gehen alle Meridiankreise, die sich in den Polen unter denselben Winkeln schneiden, wie auf dem Globus. (In der Figur folgen sie unter $22\frac{1}{2}^0$ aufeinander.) Die Mittelpunkte μ_1, μ_2 und μ_3 ergeben sich folgendermaſsen: Man teile $\sphericalangle VN_2W$ im Grundriſs in vier gleiche Teile und errichte auf den Teillinien XN_2, YN_2, ZN_2 Lote $N_2\mu_1$, $N_2\mu_2$, $N_2\mu_3$.

Die Projektionen der Parallelkreise kann man auf verschiedene Weise finden. 1) Projiziert man A und B von P aus auf die Antipodenebene, so erhält man den Durchmesser A_1B_1 des gesuchten Kreises. Oder 2) Man projiziere H mittels P nach H_1 und verlege dieses vertikal nach H_2. Dort ziehe man die Tangente des Grundriſskreises, was den Mittelpunkt M_1 des Parallelkreises giebt. 3) Die Gradteilung des Hauptkreises im Grundriſs wird eine regelmäſsige (in der Figur z. B. je $22\frac{1}{2}^0$), denn der Meridian NS des Aufrisses ist zur Antipodenebene parallel, er wird also geometrisch ähnlich projiziert. In den Teilpunkten sind, wie vorher, Tangenten an den Kreis zu legen.

Digitized by Google

Bemerkung: Hier, wie bei der Polarkarte, ist das Vergrößerungsverhältnis in der Mitte 1 : 1, am Rande 1 : 2. — Beide Kreisscharen sind Kreise gemeinschaftlicher Potenzlinie. Diese Karte, wie die vorige, sind perspektivische Zeichnungen. Sie stellen das Gradnetz so dar, wie es erscheint, wenn das Auge an eine Öffnung der Hohlkugel gebracht wird und in ihr Inneres hineinsieht.

Aufgabe 199. Die beiden Halbkugelkarten über den Rand hinaus fortzusetzen und die Länderformen einzutragen. Dadurch erhält man die Erdkarte auf einem Blatte, jedoch mit starken Verzerrungen.

Aufgabe 200. Die Halbkugel-Karte der größten oder kleinsten Wassermasse zu konstruieren.

Aufl. Man lege den Globus mit dem Punkte, der als Mittelpunkt jener Halbkugel betrachtet wird, auf die Ebene und projiziere vom Antipodenpunkte aus.

Wie man die Fläche des Globus stereographisch auf die Ebene übertragen kann, so kann man umgekehrt die Ebene stereographisch auf den Globus übertragen. Dies geschieht, indem man die Kugel auf die Ebene legt und jeden Punkt der letzteren mit dem Antipodenpunkte der Ebene verbindet.

War nun z. B. die Ebene in ein Netz kleiner Quadrate eingeteilt, so folgt, dafs durch diese Übertragung auf der Kugelfläche Kurvenscharen entstehen, durch welche eine Einteilung in kleine Quadrate erzielt wird. Dadurch vereinfachen sich einige der früheren Aufgaben und gleichzeitig wird ein Hebel für weitergehende Konstruktionen gefunden.

Aufgabe 201. Die Kugeloberfläche durch zwei Kreisscharen, die durch einen Oberflächenpunkt gehen, in kleine Quadrate einzuteilen.

Aufl. Man teile die Ebene durch zwei Scharen paralleler Geraden in ein Quadratnetz ein und übertrage die Zeichnung stereographisch auf die Kugelfläche.

Hilfs-Aufgabe 202. Die Ebene durch ein Strahlenbüschel und die orthogonale konzentrische Kreisschar in ein Quadratnetz einzuteilen.

Aufl. Die Strahlen müssen unter gleichem Winkel α aufeinander folgen. In der Zeichnung ist $\frac{\pi}{8}$ gewählt (Figur 155). Die

Digitized by Google

sogenannten Quadrate $ABDC$, BB_1D_1D u. s. w. sind ähnlich, also ist

$$MA : MB = MB : MB_1 .$$

Setzt man

$$MA = 1, \quad MB = c,$$

so ist also

$$MB_1 = c^2,$$

der nächste Radius c^3 u. s. w. d. h. die Radien bilden eine geometrische Reihe. Hat man demnach MA und MB, so findet man B_1, indem man $BD_1 \parallel AD$ zieht und mit MD_1 um M einen Kreis schlägt. Um nun „Quadrate" zu erhalten, berechne man e^α, in der Figur also

$$e^{\frac{\pi}{8}} = 1{,}480973 \ldots,$$

wo

$$e = 2{,}7182818 \ldots,$$

d. h. die Basis der natürlichen Logarithmen ist, setze dann wieder

$$MA = 1$$

und konstruiere den Wert

$$MB = e^{\frac{\pi}{8}} = 1{,}48 \ldots$$

mit beliebiger Genauigkeit. Die übrigen Radien findet man dann nach obiger Diagonal-Konstruktion.

Beweis: Man kann die Teilung durch Halbierung der Winkel bei M und Einschaltung mittlerer Proportionalen der Radien zu beliebiger Kleinheit fortsetzen.

Erst dann kann man von Quadraten reden, da die Bogen mit immer gröfserem Rechte als Gerade bezeichnet werden können. Ist nun α sehr klein, so können in der Reihe

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\cdots$$

die Glieder mit α^2, α^3 .... vernachlässigt werden, und man ist berechtigt

$$AB = e^\alpha - 1 = \left(1 + \frac{\alpha}{1}\right) - 1 = \alpha$$

zu setzen. Nun ist aber AC der zum Winkel α gehörige, an Radius 1 befindliche Bogen, also ist auch $AC = \alpha$. Folglich ist bei hinreichender Kleinheit der Einteilung $AC = AB$, also $ABDC$ ein „Quadrat".

Aufgabe 203. Die Globusfläche durch ein Kreisbüschel, welches durch zwei ihrer Punkte geht und durch die orthogonale Kreisschar in ein Quadratnetz einzuteilen.

Digitized by Google

Aufl. Man übertrage die vorige Einteilung stereographisch auf die Kugeloberfläche.

Bemerkung: Mit Hilfe dieser Quadratteilungen kann man, wie schon früher angedeutet wurde, bequem zur Mercatorprojektion und anderen kartographischen Darstellungen übergehen.

§ 31.

Schlufsbemerkung.

Die Zentralperspektive ist insofern eine mathematische mit dem Sehprozess nicht ganz übereinstimmende Abstraktion, als es sich bei ihr um die Zentralprojektion auf eine Ebene handelt. Ist diese Ebene senkrecht gedacht, so erscheinen z. B. zwei vertikale Geraden auf ihr als vertikale Geraden, die also einander parallel sind, d. h. überall gleichen Abstand haben. In Wirklichkeit sieht unser Auge nicht so, denn alles ferner Liegende erscheint ihm kleiner, als das näher Liegende. Denkt man sich also jene beiden Geraden ins Unendliche verlängert, so scheinen sie schliefslich (für unser Auge) zusammenzutreffen, denn ihr Abstand erscheint zuletzt unendlich klein. Nur wenn das Auge sich genau im Projektionszentrum befindet, treten bei der Betrachtung des Bildes an diesem dieselben Verkürzungen auf, wie an den dargestellten Gegenständen. Mit dem Bilde selbst wird also ein perspektivischer Prozefs vorgenommen.

Bezeichnet man nun die Art und Weise, wie unser Auge in Wirklichkeit sieht, als subjektive Perspektive, die mathematische Zentralperspektive dagegen als objektive Perspektive, so existieren zwischen beiden bestimmte Unterschiede, die sich mathematisch formulieren lassen und uns darüber aufklären, warum geometrisch richtige Zentralperspektive unserem Auge bisweilen verzerrt und verschroben erscheint.

Die unbewufste Aktion unseres Auges beim wirklichen Sehen beruht in folgendem: Die Gröfse, in der ein Gegenstand erscheint, richtet sich nach dem Gesichtswinkel, d. h. nach dem Winkel, den die von dem Auge nach den äufsersten Punkten des Gegenstandes gerichteten Linien miteinander bilden. Winkelgröfsen aber mifst man unwillkürlich als Bogen eines beliebig gewählten Einheitskreises, bezw. einer Einheitskugel, in deren Mittelpunkte das Auge zu denken ist. Visiert z. B. der Zeichner mit Hilfe eines Stiftes, den er bei ausgestrecktem Arme in der Hand hält, so befinden sich

Digitized by Google

die verschiedenen Lagen des Stiftes auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkte er das Auge möglichst nahezubringen sucht. Die subjektive Perspektive zeichnet also die Umgebung gewissermafsen auf die Innenfläche einer Glaskugel, in deren Mittelpunkte sich das Auge befindet; die objektive Perspektive dagegen zeichnet sie auf eine ebene Glastafel. Beide Zeichnungen decken sich für das Auge des Beschauers, sobald dasselbe sich im gemeinschaftlichen Projektionszentrum befindet. Tritt es aber aus diesem Zentrum heraus, um beide Darstellungen etwa nebeneinander zu betrachten, so fallen ihm sofort mehr oder weniger erhebliche Unterschiede auf.

Es ist ohne weiteres klar, dafs die Projektion der obigen beiden Vertikalen auf jene Kugeloberfläche zwei gröfste Kreise giebt, die sich im höchsten und tiefsten Punkte der Kugel schneiden, was mit dem oben behaupteten Zusammentreffen vollständig übereinstimmt.

Eine verhältnismäfsig kleine Fläche jener Kugel kann man angenähert als eben betrachten. Daher stimmen die subjektive und objektive Perspektive nur auf einer kleinen Bildfläche einigermafsen überein. Die Unterschiede werden aber auffallender, sobald der Gesichtswinkel des Bildes gröfser wird. Geht z. B. das zentralperspektivische Bild über den Kreis hinaus, dessen Durchmesser die Entfernung der beiden Distanzpunkte ist, so treten Verzerrungen auf, die unserem Auge als inkorrekt erscheinen, obwohl sie mathematisch richtig sind. Der Konflikt kommt also daher, dafs das Auge gewohnt ist auf eine Kugel zu projizieren, während der Zeichner genötigt ist, auf eine Ebene zu zeichnen.

Mit dem Verhalten auf der Kugel ist es ähnlich wie mit den Verzerrungen auf architektonischen Photographieen. Ist z. B. auf einer solchen das Innere einer Kirche dargestellt, so erscheinen die Pfeiler nur unten senkrecht, krümmen sich aber oben einander zu. Jedoch erklären sich diese Erscheinungen aus den optischen Eigenschaften der angewandten Linsen.

Aus dem Unterschiede zwischen subjektiver und objektiver Perspektive erklären sich auch eine Menge von Schwierigkeiten, die dem Anfänger beim „Zeichnen nach der Natur“ aufzustofsen pflegen. Hierin liegt auch der Grund gewisser Willkürlichkeiten, die der Maler sich bisweilen bewufst oder unbewufst gestattet, obwohl er, da seine Zeichenfläche eine Ebene ist, streng nach dem Gesetz der objektiven Zentralperspektive zeichnen sollte. So wird man z. B. selten ein

Digitized by Google

Gemälde finden, auf dem der elliptisch erscheinende Rand z. B. eines Tellers oder eines Glases als schräg liegende Ellipse gezeichnet ist, wie es die objektive Perspektive meistens verlangt, man wird vielmehr in der Regel gegen das Gesetz der letzteren horizontal liegende Ellipsen vorfinden. Ebensowenig wird man auf den Gemälden Kugeln nach dem strengen Gesetz der Zentralperspektive gezeichnet vorfinden, d. h. als schräge Ellipsen konstruiert, da sich der Maler in der Regel mit der Darstellung als Kreis begnügt. Alle diese Abweichungen sind darin begründet, dafs an Stelle der objektiven Perspektive die subjektive Perspektive tritt, dafs Konzessionen an den Standpunkt des Laien gemacht werden, der bei dem Betrachten des seitwärts stehenden Gegenstandes das Auge nach ihm hinwendet und damit der Projektionsebene eine andere Stellung giebt.

Schwerlich giebt es jetzt noch Maler, die über das Wesen beider Arten von Perspektive nicht hinreichend aufgeklärt sind, sich gegen die mathematische Perspektive mehr oder weniger ablehnend verhalten, und dadurch in die Gefahr geraten, bedenkliche Fehler zu begehen. Von solchen würde noch heute das Wort gelten, welches Albrecht Dürer in seiner „Unterweisung der Messung mit Zirkel und Richtscheit“ aussprach: „Dafs aber solche Maler an ihren Irrtümern Wohlgefallen gehabt, rührt davon her, dafs sie die Kunst der Messung nicht gelernt, ohne die kein rechter Werkmann werden und sein kann.“

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CALIFORNIA (BR

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE STAMPED BELOW

AN INITIAL FINE OF 25 CENTS

WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE FOURTH DAY AND TO $1.00 ON THE SEVENTH DAY OVERDUE.

APR 29 1943

LD 21–100m-7,'39(402s)

Digitized by Google

39687
QA501
H6
Holzmüller
Stereometrisches zeichnen
Oct23'12 Kower
FEB 4 19
FEB 6 19
NOV 29 1915
APR 30 1943
APR 26 1943
UNIVERSITY O
QA501
H6
Holzmüller
39687
YD 05058
Digitized by Google

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Holzmüller, Dr. Gustav, Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, Mitglied der Kaiserl. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher etc., vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird. Besonderer Abdruck aus dem XIII. Bande der Mathematischen Annalen. Beilage zum Programm 1881 der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen. Hierzu 4 lithogr. Tafeln. [32 S.] gr. 8. 1881. geh. n. *M.* 2.—

——— Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Mit 26 lithographirten Tafeln. [VIII u. 284 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 11.20.

Der Verfasser hat seit elf Jahren eine Reihe von Abhandlungen über das in der Überschrift genannte Thema veröffentlicht, welche die Absicht hatten, als veranschaulichende Beispiele in die Riemannschen Theorieen einzuführen. Abgesehen von der rein mathematischen, besonders der geometrischen Ausbeute, die z. B. den Ausbau der von Siebeck angebahnten Verwandtschaftstheorie förderte, der bisher nur ein vollständig ausgeführtes Beispiel, die Kreisverwandtschaft von Möbius, zur Verfügung stand, handelte es sich gleichzeitig um Anwendungen auf Kartographie, Wärmetheorie (Isothermenlehre), Elektrodynamik (stationäre elektrische Strömung in Platten), Hydrodynamik (Lehre von den Flüssigkeitsbewegungen, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existiert) und die Kinematik konform veränderlicher Systeme. Auf instruktive Zeichnungen Riemannscher Flächen und isothermischer Kurvensysteme wurde besonderer Wert gelegt.

Dafs die Abhandlungen ihren Zweck erfüllten, geht daraus hervor, dafs sie in der einschlagenden Litteratur entsprechende Berücksichtigung finden. In neuerer Zeit sind die Resultate besonders ausführlich in einer Dissertation von Dr. Hildebrandt „über stationäre elektrische Strömung", Göttingen 1881, verarbeitet worden. Eine schöne experimentelle Bestätigung fanden die Netze der Strömungs- und Spannungskurven durch die elektrochemische Methode des Herrn Dr. Guébhard vom Laboratoire de Physique à la Fac. de Médicine zu Paris (vergl. Comptes rendus 1881/82 und Electricien, Februarheft 1882). Letzterem Herrn wurden vom Verfasser auch die noch nicht herausgegebenen Zeichnungen zur Verfügung gestellt, die, mit den elliptischen Funktionen zusammenhängend, für das hier angezeigte Werk bestimmt sind. Über die Kongruenz derselben mit den auf Platten dargestellten Nobilischen Farbenringen, die unter den vorgeschriebenen Bedingungen mit Hilfe starker elektrischer Ströme und linienförmiger Elektroden erzeugt wurden, hat Herr Guébhard in der Sitzung der Académie des Sciences vom 13. Februar 1882 Vortrag gehalten (vgl. Comptes rendus).

Aus diesen Mitteilungen läfst sich der Charakter des Werkes entnehmen. Dasselbe führt in möglichst leichter und anschaulicher Weise in die geometrische Darstellung der komplexen Gröfsen und der Rechnungsoperationen mit denselben ein, behandelt sodann die Inversion und Kreisverwandtschaft als einleitendes Beispiel, absolviert darauf ein allgemeines Kapitel über Funktionen komplexen Arguments und geht dann zur Detailbearbeitung wichtiger Funktionen resp. Funktionengruppen — bis zu den elliptischen — über. Die auftretenden isothermischen Koordinatensysteme werden in ähnlicher Weise, wie in den Leçons sur les coordonnées curvilignes von Lamé, so fertig formuliert, dafs die einschlagenden physikalischen Beispiele ohne weiteres abgelesen werden können. Auch der Zusammenhang mit der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ wird an allen Stellen erörtert.

Neben den Lehrbüchern von Thomae, Durège, Neumann etc. wird die Arbeit nicht überflüssig sein, sondern in vieler Hinsicht ergänzend und anregend einwirken. Die Darstellungsweise ist so leicht gehalten, dafs schon Studierende der ersten Semester im stande sein werden, sich selbständig in die entsprechenden Theorieen einzuarbeiten.

——— einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie, die mit der Theorie der isogonalen Verwandtschaften zusammenhängen. Besonderer Abdruck aus der Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht XIV. Jahrg. [27 S. u. 2 Tafeln.] gr. 8. 1883. geh. n. *M.* —.80.

Digitized by Google